

Б. АЛИЕВ

АЛГЕБРА

**Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ**

**Нашри сеюм
бо тағйирот ва иловаҳо**

**Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон
тасдиқ кардааст**

**Душанбе
2020**

ББК 74.26 Я72
А-80

А.80. Алиев Б. Алгебра. Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ. –Душанбе: “Душанбе-принт”, 2020. –256 саҳ.

Хонандаи азиз!

Китоб манбаи донишу маърифат аст, аз он баҳравар шавед ва онро тоза нигоҳ доред! Кӯшиш кунед, ки соли таҳсили оянда ҳам ин китоб ҳамин гуна зебову ороста дастраси хонандагони дигар гардад ва онҳо низ аз он истифода баранд.

Ҷадвали истифодаи китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли таҳсил	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

ISBN 978-99975-365-7-0

Моликияти давлат

© Б. Алиев, 2020

МУҚАДДИМА

Мо омӯзиши фанни алгебра ва ибтидои анализи, ки дар синфи 10-ум сар карда будем, давом медиҳем. Мундариҷаи китоб аз доираи барномаи таълими фанни математика (Душанбе: «Душанбе-принт», 2018) васеътар буда, қариб тамоми маводди таълимии мактабҳои тамоюли риёзиро дар бар мегирад. Сохтори китоб бо сохтори китобҳои дарсии синфҳои 7–10-ум, ки дар чанд соли охир чоп шудаанд, яхела аст.

Китоб аз се боб иборат аст. Дар боби 1-ум мафҳумҳои нав **-функсияи ибтидоӣ ва интеграл**, баъзе хосиятҳо ва татбиқи онҳо омӯхта мешавад (Бояд гуфт, ки анализ ба курси математикаи олии мансуб аст. Дар муассисаи таҳсилоти умумӣ танҳо элементҳои он омӯхта мешаванд.). Боби 2-юм аз омӯзиши мафҳуми **функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он** сар мешавад. Баъд мафҳуми нав - **логарифм**, ки амали баръакси бадараҷабардорӣ аст, оварда мешавад. Хосиятҳои логарифм, тарзҳои ҳал кардани муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ қисми асосии ин боб мебошанд. Боб бо овардани мафҳум дар бораи **муодилаҳои дифференсиалӣ** ба итмом мерасад.

Ҳалли мисолу масъалаҳои дар ин ду боб овардашуда зарурати истифодаи тамоми паҳлуҳои маводди назариявиро талаб мекунад. Барои ҳамин дар аввал қисми назариявии бандро бодиккат омӯхта, ба саволҳои назоратӣ ҷавоб гардонида, мисолҳои дар он ҳалшударо азхуд карда, сипас ба ҳалли супоришҳо шурӯъ кунед.

Дар бандҳо супоришҳо тавре ҷойгир карда шудаанд, ки бо зиёд шудани рақами тартибиашон ҳалли онҳо

андаке мураккаб мегардад. Барои ҳамин чанд машқи аввалаи пас аз назария омадаи бандро шифохӣ шумурдан мумкин аст. Машқҳои ҳаллашон мураккабтар бо аломати (*) ишорат карда мешаванд. Бо ҳал кардани мисолу масъалаҳои қисми «Машқҳои иловагӣ доир ба боб», ки дар охири ҳар як боб оварда мешаванд, шумо мустақилона худро санҷида метавонед, ки то кадом дараҷа маводди заруриро азхуд кардаед.

Ҷавобҳои машқҳои ҳар як боб дар охираш оварда мешаванд, ки ин вақти шуморо барои санҷидани дурустии ҷавоби ёфташуда сарфа мекунад.

Ҳар як банд бо қисми «Машқҳо барои такрор» ба охир мерасад. Азбаски шумо хатмкунанда ҳастед ва имтиҳони хаттии хатмкунӣ месупоред, мисолу масъалаҳои ин қисм (бо назардошти назарияи то ҳамин замон омӯхташуда) айнан ба он имтиҳон шабоҳат доранд. Дар тартиб додани машқҳои ин қисм вариантҳои корҳои хаттии имтиҳони хатми солҳои 1998–2002 истифода шудаанд. Ин имконият медиҳад, ки шумо тахминан чӣ гуна будани масъалаҳои имтиҳони хатмро дарк кунед. Барои ҳамин хоҳиш карда мешавад, ки машқҳои ин қисмро хатман ҳал кунед.

Талаботи Стандарти давлатии маълумоти умумиро ба эътибор гирифта, дар охири бобҳо маълумоти таърихӣ оварда мешавад. Аз онҳо шумо доир ба пайдоиши мафҳумҳо, истилоҳҳо, рамзҳо ва роҷеъ ба бунёдгариҳои анализи математикӣ тасаввурот ҳосил мекунад.

Боби сеюм, ки «Такрор» ном дорад, аз мисолу масъалаҳое иборат аст, ки онҳо тамоми маводди «Математика» ва «Алгебра»-и мактабии синфҳои V–XI -ро дар бар мегирад. Ин мавод на аз рӯи омӯзишаш дар ин ё он синф, балки ҳамчун объекти математикӣ ба

параграфҳо чудо карда шудааст. Масалан, прогрессияҳо, ки аз адад иборатанд, дар қисми ададҳои ҳақиқӣ дар параграфи 1 оварда шудаанд. Тамоми маводди ин боб барои тайёри ба имтиҳони хатм пешбинӣ мешавад. Китобҳои дарсии то ҳол нашршудаи муаллифони тоҷик ва чандин китоби дарсии дигар ҳангоми навиштани ин боб истифода шудаанд.

Наشري навбатии китоб баъди реҳлати муаллифи он, профессор Боймурод Алиев омода шудааст. Дар ин нашр тағйироти зерин ба ҷашм мерасад:

- матни китоб бо назардошти меъёрҳои нави имлои забони тоҷикӣ ба риштаи таҳрир кашида шудааст;

- хатоҳои математикие, ки дар наشري пешинаи китоб ҷой доштанд, ислоҳ карда шудаанд;

- яке аз талаботи асосии муносибати босалоҳият ин ҷаҳол гардонидани хонандагон дар раванди таълим тавассути саволу ҷавоб ва додани супоришҳо оид ба мавзӯи матраҳшаванда мебошад, то ки онҳо баъди омӯзиши ҳар як мавзӯӣ салоҳиятҳои заруриро ба даст оранд. Ба ибораи дигар, хонандагон бояд маводди назариявии ҳар як мавзӯро пеш аз омӯзиши мавзӯи нав пурра азхуд кунанд ва дониши назариявии гирифтаашонро дар ҳалли мисолу масъалаҳои амалӣ татбиқ карда тавонанд. Инро ба инобат гирифта, миқдори саволҳо оид ба ҳар як мавзӯӣ зиёд карда шудааст;

- низоми супоридани имтиҳонҳои қабул ба муассисаҳои таҳсилоти олии касбии кишварро ба назар гирифта, дар охири ҳар як боб мисолу масъалаҳои тестӣ оварда шудаанд. Омӯзгор зимни гузаштани дарсҳо ба таври мувофиқ метавонад аз онҳо истифода барад;

- дар охири китоб як миқдор масъалаҳои ҳаллашон нисбатан мураккаб пешниҳод гардидааст. Ин масъалаҳо барои тайёри ба озмуну олимпиадаҳои сатҳашон гуногун пешбинӣ шудаанд;

- матни баъзе мавзӯҳо аз ҳисоби ворид кардани мисолҳои нав такмил дода шудааст.

Аз хонандагон эҳтиромона хоҳиш карда мешавад, ки фикру мулоҳизаҳои онро нисбат ба мазмуну мундариҷаи китоб ба Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ё ба суроғи электрони mahmadsalim_86@mail.ru ирсол доранд. Андешаҳои муфид зимни омода кардани китоб барои нашрҳои оянда ба инобат гирифта мешаванд.

ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ИНТЕГРАЛ

§1. ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ

Мо ба омӯзиши амали нави математикӣ – *интегралгирӣ* ва қонуниятҳои он шурӯъ мекунем. Ин амал ба амали ҳосилагирӣ, яъне ёфтани ҳосилаи функсия, амали баръакс аст.

Аз мисол сар мекунем. Бигузор ҷисм аз рӯйи қонуни $S(t) = t^2 + 2t$ ҳаракат кунад. Яъне дар лаҳзаи вақти t ҷисм масофаи бо ин формула ҳисоб мешударо тай мекунад. Суръат ва шитоби ҷисмро меёбем. Тавре медонем, ҳосила аз масофаи тайшуда суръат $\mathcal{V}(t)$ буда, ҳосила аз суръат шитоб $a(t)$ -ро медиҳад:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(t) = s'(t) &= (t^2 + 2t)' = (t^2)' + (2t)' = 2t + 2 ; \\ a(t) = \mathcal{V}'(t) &= (2t + 2)' = 2 .\end{aligned}$$

Айнан мисли ҳамин мисол, агар формулаи Галилей $s = \frac{gt^2}{2}$ -ро гирем, ки вай масофаи тайкардаи ҷисмро ҳангоми оғоз афтидани он ифода менамояд (дар лаҳзаи ибтидоии вақт $t = 0$ суръат нул аст, яъне $\mathcal{V}(0) = 0$), он гоҳ бо воситаи ҳосилагирӣ суръатро меёбем:

$$\mathcal{V}(t) = s'(t) = gt .$$

Ҳосилаи дуум шитобро медиҳад:

$$a(t) = \mathcal{V}'(t) = g .$$

Дар механика ва техника бо масъалаи баръакс вомехӯрем: шитоби нукта $a(t)$ (ҷисм ҳамчун нукта қабул карда мешавад)

маълум аст, ёфтани қонуни тағйирёбии суръат $\mathcal{I}(t)$ ва координата $s(t)$ талаб карда мешавад. Ба ибораи дигар, аз рӯйи ҳосилаи маълум $\mathcal{I}'(t)$, ки ба $a(t)$ баробар аст, $\mathcal{I}(t)$ -ро ва баъд аз рӯйи ҳосилаи $s'(t)$, ки ба $\mathcal{I}(t)$ баробар аст, $s(t)$ -ро ёфтан даркор аст.

Ин гуна масъалаҳо бо ёрии амали *интегралгирӣ* ҳал карда мешаванд.

Т а ъ р и ф. **Функцияи $F(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ барои функцияи $f(x)$ функцияи ибтидоӣ номида мешавад, агар барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанди x аз $(a; b)$**

$$F'(x) = f(x)$$

бошад. Яъне ҳосилаи $F(x)$ ба $f(x)$ баробар шавад.

Ёфтани функцияи ибтидоии функцияи додашударо **амали интегралгирӣ** меноманд.

Мисолҳои мушаххасро дида мебароем.

М и с о л и 1. Функцияи $F(x) = \frac{x^2}{2}$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ барои функцияи $f(x) = x$ функцияи ибтидоӣ аст, чунки барои ҳар гуна $x \in (-\infty; \infty)$

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} \right)' = \frac{1}{2} (x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x).$$

Бо осонӣ мебинем, ки ҳосилаи $\frac{x^2}{2} + 5$ низ ба x баробар аст. Пас, ин функция низ функцияи ибтидоӣ аст. Фаҳмост, ки ба ҷойи 5 адади дилхоҳро гирифтани мумкин аст. Ҳамин тариқ, барои функцияи мушаххаси $f(x) = x$ функцияҳои ибтидоӣ бешуморанд.

М и с о л и 2. Барои функсияи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0; \infty)$ функсияи $F(x) = 2\sqrt{x}$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки барои ҳар гуна x аз $(0; \infty)$

$$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x).$$

Айнан ба монанди мисоли 1, функсияи $F(x) = 2\sqrt{x} + C$, ки дар ин ҷо C доимии дилхоҳ аст, барои функсияи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0; \infty)$ функсияи ибтидоӣ мебошад.

М и с о л и 3. Функсияи $F(x) = \frac{1}{x-1}$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ барои функсияи $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ функсияи ибтидоӣ шуда наметавонад, чунки дар нуктаи $x=1$ баробарии $F'(x) = f(x)$ ҷой надорад. Вале дар ҳар яке аз фосилаҳои $(-\infty; 1)$ ва $(1; \infty)$ $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ мебошад.

М и с о л и 4. Функсияи $F(x) = 2\sin(x+1)$ барои функсияи $f(x) = 2\cos(x+1)$ дар тамоми нуктаҳои тири ададӣ функсияи ибтидоӣ аст. Воқеан, барои ҳар гуна $x \in (-\infty; +\infty)$

$$F'(x) = (2\sin(x+1))' = 2\cos(x+1) \cdot (x+1)' = 2\cos(x+1)$$

мебошад. Ба монанди мисолҳои 1 ва 2 ин ҷо низ пай мебарем, ки $F(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ барои функсияи $f(x)$ аст.

Э з о ҳ. Бар хилофи мафҳуми ҳосила, ки дар синфи 10-ум аввал дар нукта, баъд дар фосила муайян карда шуда буд, мафҳуми функсияи ибтидоӣ якбора дар тамоми фосила муайян карда мешавад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ҳангоми дода шудани қонуни ҳаракат, суръат ва шитоби он чӣ тавр ёфта мешаванд?

2. Амали интегралгирӣ гуфта, чиро мефаҳманд?

3. Чӣ гуна масъалаҳо бо ёрии амали интегралгирӣ ҳал карда мешаванд?

4. Функсияи ибтидоӣ чист? Мисолҳо оред.

5. Чаро барои функсияи додашуда функсияҳои ибтидоӣ бешуморанд?

6. Як функсия тартиб дода, сипас ду функсияи ибтидоии онро нишон диҳед.

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

1. Исроҳот кунед, ки функсияи $F(x)$ дар фосилаи додашуда барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст:

а) $F(x) = x^3$, $f(x) = 3x^2$, $x \in (-\infty; \infty)$;

б) $F(x) = \frac{1}{6}x^6$, $f(x) = x^5$, $x \in (-\infty; \infty)$;

в) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$, $x \in (0; \infty)$;

г) $F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$, $f(x) = x^{-3}$, $x \in (0; \infty)$;

д) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

е) $F(x) = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{4}$, $f(x) = \frac{1}{4\cos^2 \frac{x}{4}}$, $x \in (-2\pi; 2\pi)$;

ж) $F(x) = x^{\frac{4}{3}} - 21$, $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x \in (-\infty; \infty)$;

з) $F(x) = \sin(2x + 3) + 1$, $f(x) = 2\cos(2x + 3)$, $x \in (-\infty; \infty)$.

2. Оё дар фосилаи додашуда функцияи $F(x)$ барои функцияи $f(x)$ функцияи ибтидоӣ шуда метавонад:

а) $F(x) = 2 - \cos x$, $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

б) $F(x) = 12 - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (-1; 1)$;

в) $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in (0; \infty)$;

г) $F(x) = x^2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$, $x \in (-\infty; \infty)$;

д) $F(x) = x^{-2} + 1$, $f(x) = \frac{1}{2x^3}$, $x \in (0; \infty)$;

е) $F(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$?

3. Барои функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ яке аз функцияҳои ибтидоиро ёбед:

а) $f(x) = 1,5$; б) $f(x) = 2x$; в) $f(x) = \sin x$;

г) $f(x) = \cos x$; д) $f(x) = -x$; е) $f(x) = -\cos x$;

ж) $f(x) = -3$; з) $f(x) = -\sin x$; и) $f(x) = x^2$;

к) $f(x) = x^5$; л) $f(x) = 0$; м) $f(x) = -x^3$.

4. Ба чойи нуктаҳо ягон функцияро гузоред, ки баробари қаноат кунонад:

а) $(\dots)' = 1,5$; б) $(\dots)' = \cos x$; в) $(\dots)' = -\frac{1}{x^2}$;

г) $(\dots)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $(\dots)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; е) $(\dots)' = 2 \sin x$;

ж) $(\dots)' = \frac{1}{\sin^2 x}$; з) $(\dots)' = \sin 4x$; и) $(\dots)' = -\cos(2x+3)$.

5. Ду функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ -ро ёбед:

а) $f(x) = 4x$;

б) $f(x) = \sin x + 1$;

в) $f(x) = x^3$;

г) $f(x) = 2 - \cos x$.

6. Аз се функцияи овардашуда ҳамонашро нишон диҳед, ки дутои дигар мувофиқан ҳосила ва функцияи ибтидоии он аст:

а) $f(x) = 2$, $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x + 1$;

б) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 1$, $h(x) = \frac{x^2}{2} + x + 3$;

в) $f(x) = 1 - \sin x$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + 2$, $h(x) = x + \cos x$.

Машқҳо барои тақрор

7. Коэффициенти кунҷии расандаро, ки ба графики функцияи $f(x) = 2x^4 - 7x + 4$ дар нуқтаи абсиссааш $x = 1$ гузаронида шудааст, ёбед.

8. Шитоби ҳаракатро ёбед, агар чисм ростхатта аз рӯйи қонуни $s(t) = 2t^2 - t + 3$ ҳаракат кунад.

9. Муодиларо ҳал кунед:

$$x + \sqrt{7 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}} = 4.$$

10. Функцияи $y = x^2(x - 3)$ -ро бо ёрии ҳосила тадқиқ карда, графикашро соzed.

11*. Қимати $\operatorname{tg} \alpha$ -ро ёбед, агар $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ ва

$$\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right) \text{ бошад.}$$

2. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОЙ

Дар ин банд намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи додашуда меёбем.

Тавре дидем, функсияи ибтидой ягона нест. Масалан, функсияҳои $\frac{x^2}{2} + 5$ ва $\frac{x^2}{2} - 10$, умуман, функсияи $\frac{x^2}{2} + C$ барои ҳар гуна қимати доимии C , барои $f(x) = x$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ функсияҳои ибтидоианд. Фаҳмост, ки фарқи ин ду функсияи ибтидой адади доимӣ аст. Нишон медиҳем, ки ин ба ҳар гуна функсияи ибтидой хос аст, яъне як функсияи ибтидой аз дигараш бо қимати доимӣ фарқ мекунад. Аниқаш тасдиқи зерин дуруст аст, ки он *хосияти асосии* функсияи ибтидоиро ифода мекунад.

Т е о р е м а. Агар функсияи $F(x)$ яке аз функсияҳои ибтидой барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ бошад, он гоҳ ҳар гуна функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ дар ин фосила намуди

$$F(x) + C$$

-ро дорад, ки дар ин ҷо C доимии дилхоҳ аст.

Пеш аз исботи теорема дурустии леммаи зеринро нишон медиҳем, ки он ҳамчун *нишонаи доимӣ* будани функсия маълум аст.

Л е м м а. Агар дар фосилаи $(a; b)$ ҳосилаи функсияи $F(x)$ айниятан ба нул баробар бошад, яъне $F'(x) \equiv 0$ барои ҳар гуна $x \in (a; b)$, он гоҳ $F(x)$ дар ин фосила доимӣ аст.

И с б о т. Нуктаи ихтиёрии x_0 -ро аз фосилаи $(a; b)$

интихоб мекунем. Барои ҳар гуна x аз ин фосила, мувофиқи формулаи Лагранж, чунин нуқтаи c -и ин фосила ёфт мешавад, ки барояш

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0).$$

Вале мувофиқи шарт $F'(c) = 0$ аст, пас $F(x) = F(x_0)$ барои ҳар гуна $x \in (a; b)$. Яъне қимати функцияи $F(x)$ дар ҳамаи нуқтаҳои фосилаи $(a; b)$ якхела мебошад. Лемма исбот шуд.

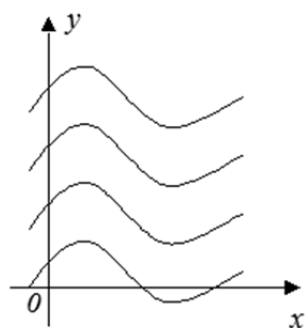
И с б о т и т е о р е м а. Бигузор функцияҳои $\Phi(x)$ ва $F(x)$ барои функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ функцияҳои ибтидоӣ бошанд, яъне барои ҳар гуна $x \in (a; b)$: $\Phi'(x) = f(x)$ ва $F'(x) = f(x)$. Пас,

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Аз ин ҷо ва аз лемма бармеояд, ки фарқи $\Phi(x) - F(x)$ функцияест, ки дар фосилаи $(a; b)$ доимӣ мебошад. Ин қимати доимиро бо C ишорат карда, ҳосил мекунем:

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad (1)$$

ки он дурустии тасдиқи теоремаро нишон медиҳад.



Расми 1.

Э з о ҳ и 1. Маънои геометрии ҳосияти асосии функцияи ибтидоӣ чунин аст: графикҳои ду функцияи дилхоҳи ибтидоии функцияи $f(x)$ аз ҳамдигар ба воситаи ба самти тири ОУ параллел кӯчонидан ҳосил мешаванд (расми 1).

М и с о л и 1. Зоҳиран фаҳмост, ки функцияҳои $F(x) = x^2$ ва $\Phi(x) = x^2 + 4$ барои ҳамон як функцияи ибтидоианд. Дар ҳақиқат, $F'(x) = 2x$, $\Phi'(x) = (x^2 + 4)' = (x^2)' + (4)' = 2x + 0 = 2x$ ва бинобар ин

$\Phi(x) = F(x) + 4$. Графики $\Phi(x)$ аз графики параболаи $F(x)$ бо воситаи ба самти тири OY , ба боло, ба 4 воҳид кўчонидан ҳосил мешавад.

Э з о ҳ и 2. Тасдиқи теорема ду хосияти зерини функцияи ибтидоиро дарбар мегирад:

1. Ҳангоми дар баробарии (1) ба ҷойи C гузоштани адади дилхоҳ функцияи ибтидоӣ ҳосил мешавад;

2. Ҳангоми дода шудани яке аз функцияҳои ибтидоии $F(x)$, ҳатман чунин адади C - ро ёфтан мумкин аст, ки дигараш бо баробарии (1) ифода мешавад.

М и с о л и 2. Нишон медиҳем, ки фарқи функцияҳои $F(x) = \frac{\cos 2x}{2}$ ва $\Phi(x) = \cos^2 x$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ доимӣ аст ва ин доимиро меёбем. Азбаски

$$\begin{aligned} F'(x) - \Phi'(x) &= \left(\frac{\cos 2x}{2} \right)' - (\cos^2 x)' = \frac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 - \\ &- 2\cos x(\cos x)' = -\sin 2x - 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x + 2\sin x \cos x = \\ &= -\sin 2x + \sin 2x = 0, \end{aligned}$$

пас мувофиқи тасдиқи теорема:

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2x}{2} &= \cos^2 x + C; & \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} &= \cos^2 x + C; \\ \frac{2\cos^2 x - 1}{2} &= \cos^2 x + C. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо:

$$C = -\frac{1}{2}.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ду функсияи ибтидоӣ аз ҳамдигар бо чӣ фарқ мекунанд?

2. Хосияти асосии функсияи ибтидоӣ аз чӣ иборат аст?

3. Нишонаи доимӣ будани функсияро баён кунед.

4. Маънои геометрии хосияти асосии функсияи ибтидоиро баён кунед.

5. Тасдиқи теоремаро, ки он ду хосияти функсияи ибтидоиро дар бар мегирад, оред.

6. Графикҳои функсияҳои ибтидоии як функсия аз якдигар чӣ тавр ҳосил мешаванд?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

12. Магар функсияҳои зерин барои ҳамон як функсия функсияи ибтидоианд:

а) $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 5$ ва $L(x) = (x + 5)^2$;

б) $F(x) = \cos 2x$ ва $\Phi(x) = 2 \cos^2 x$;

в) $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ва $\Phi(x) = \frac{2}{x-1}$?

13. Нишон диҳед, ки функсияҳои $F(x) = -\sin^2 x$ ва $\Phi(x) = 2 \cos^2 x + \sin^2 x$ барои $f(x) = -\sin 2x$ функсияҳои ибтидоӣ буда, $F(x) = \Phi(x) - 2$ аст.

14. Оё функсияи ибтидоии функсияи даврӣ функсияи ғайридаврӣ шуда метавонад?

15*. Исбот кунед, ки функсияи ибтидоии функсияи тоқ функсияи чуфт аст.

Машиқҳо барои такрор

16. Ифодаро сода кунед:

$$\frac{2x}{x+y} : \left[\frac{x-y}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{x^2-y^2} \right].$$

17. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{(1-x)(5-x)}$ -ро ёбед.

18. Дар прогрессияи геометрӣ узви якум ба 312 ва маҳраҷи он ба $\frac{1}{2}$ баробар аст. Суммаи чор узви аввалаи ин прогрессияро ёбед.

19. Қимати хурдтарини функсияи $y = x^4 - 2x^2$ -ро дар порчаи $[-2; 2]$ ёбед.

20. Решаҳои муодилаи квадратии ислоҳшуда ба -2 ва 3 баробаранд. Ин муодиларо ёбед.

3. ЁҲТАНИ ФУНКСИЯҲОИ ИБТИДОӢ. ҶАДВАЛИ ОНҲО

Теоремаи дар банди пешина исбот кардаамонро асос карда, намуди умумии функсияҳои ибтидоиро барои якчанд функсияи додашуда меёбем. Баъд ҷадвали функсияҳои ибтидоиро меорем.

I

М и с о л и 1. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи $f(x) = x^2$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ меёбем.

Ҳ а л. Мебинем, ки яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи

$$f(x) \text{ функсияи } \frac{x^3}{3} \text{ аст, чунки } \left(\frac{x^3}{3} \right)' = \frac{1}{3} (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2. \text{ Дар}$$

асоси теорема намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои ин функсия чунин аст:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C.$$

М и с о л и 2. Барои функсияи $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ дар фосилаи $(0; \infty)$ функсияи ибтидоии $F(x)$ -ро меёбем, ки қиматаш ҳангоми $x=1$ будан ба 2 баробар аст.

Ҳ а л. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки функсияи $\frac{1}{2x^2}$ барои $-\frac{1}{x^3}$ дар фосилаи $(0; \infty)$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки $\left(\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-2-1} = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$. Пас, мувофиқи теорема ҳар гуна функсияи ибтидоӣ намуди $F(x) = \frac{1}{2x^2} + C$ -ро дорад. Мувофиқи шарт $F(1) = 2$ аст, пас $F(1) = \frac{1}{2 \cdot 1^2} + C = 2$ ё $C = 2 - \frac{1}{2} = 1,5$. Ҳамин тариқ, функсияи ибтидоии матлуб $F(x) = \frac{1}{2x^2} + 1,5$ мебошад.

М и с о л и 3. Маълум аст, ки графики функсияи ибтидоии функсияи $f(x) = -\cos x$ аз нуқтаи $(\frac{\pi}{2}; 12)$ мегузарад. Ин функсияро меёбем.

Ҳ а л. Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $-\cos x$ функсияи $F(x) = -\sin x + C$ мебошад. Пас, барои ёфтани доимии C муодилаи $F(\frac{\pi}{2}) = 12$ ё $-\sin \frac{\pi}{2} + C = 12$, ё ки $-1 + C = 12$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо: $C = 13$ ва $F(x) = -\sin x + 13$.

М и с о л и 4. Нуқта аз рӯйи хатти рост бо шитоби $a(t) = 4t$ ҳаракат мекунад. Дар лаҳзаи ибтидоии $t_0 = 1$ координатааш $x_0 = 2$ ва суръаташ $\mathcal{G}_0 = 1$ аст. Координатаи нуқта $x(t)$ -ро ҳамчун функсияи вақт меёбем.

Ҳ а л. Ин масъала намунаи масъалаи баръакс, ки дар банди 1 қайд карда будем, мебошад. Аз рӯйи $\mathcal{G}'(t) = a(t)$ аввал $\mathcal{G}(t)$ -ро, баъд аз рӯйи $x'(t) = \mathcal{G}(t)$ функсияи $x(t)$ -ро меёбем.

Функсияи ибтидоӣ барои $a(t) = 4t$ функсияи $\mathcal{G}(t) = 2t^2 + C$ мебошад. Вале $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(1) = 1$, пас $2 \cdot 1^2 + C = 1$, $C = -1$. Инак, $\mathcal{G}(t) = 2t^2 - 1$. Функсияи ибтидоӣ барои $\mathcal{G}(t)$ бошад, функсияи $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t + C$ аст. Мувофиқи шарти масъала

$$x_0 = x(t_0) = x(1) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 1 + C = 2. \quad \text{Пас,} \quad -\frac{1}{3} + C = 2,$$

$$C = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ ва } x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t + \frac{7}{3}.$$

II

Акнун чадвали функсияҳои ибтидоиро меорем. Дар сатри якум функсияи $f(x)$ ва дар сатри дуюм намуди умумии функсияи ибтидоии он $F(x)$ оварда шудааст:

$f(x)$	k (доимӣ)	$x^\alpha, \alpha \in R$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	$kx + C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-c\operatorname{tg} x + C$

Дурустии ин чадвал бо гирифтани ҳосила нишон дода мешавад. Масалан,

$$\begin{aligned}
 (tgx + C)' &= (tgx)' + C' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' + 0 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \\
 &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

Тавре дар оянда хоҳем дид, истифодаи ин чадвал ёфтани функсияи ибтидоиро барои баъзе функсияҳо осон мегардонад.

Э з о ҳ. Функсияи $\frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0; \infty)$, функсияи $\frac{1}{\cos^2 x}$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$ ва функсияи $\frac{1}{\sin^2 x}$ дар фосилаи $(\pi k; \pi(k+1))$, $k \in Z$ муайянанд. Функсияҳои ибтидоии онҳо $2\sqrt{x} + C$, $tgx + C$ ва $-ctgx + C$ низ дар ҳамин фосилаҳо муайян ҳисоб карда мешаванд.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ тавр санчидан мумкин аст, ки функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст?
2. Оё аз нуктаи додашуда ду функсияи ибтидоӣ мегузарад?
3. Оё соҳаи муайянии функсияи ибтидоӣ аз соҳаи муайянии функсияи додашуда фарқ мекунад?
4. Функсияе тартиб дихед, ки барои ёфтани функсияи ибтидоии он формулаи дуҷуми дар чадвал овардашуда истифода гардад.

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

21. Намуди умумии функсияҳои ибтидоиро барои функсияи $f(x)$ ёбед:

а) $f(x) = 2$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = x^5$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^4}$; д) $f(x) = -\sin x$; е) $f(x) = -4$.

22. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$ -ро ёбед, ки он қимати додашударо дар нуқтаи додашуда қабул кунад:

а) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $F(1) = 10$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(\frac{\pi}{4}) = -2$;

в) $f(x) = x^6$, $F(-1) = 3$;

г) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -3$.

23. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x) = x^3$, $M(2; 1)$; б) $f(x) = \sin x$, $M(0; 3)$;

в) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M(\frac{\pi}{4}; 0)$; г) $f(x) = -2$, $M(3; 5)$;

д) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $M(-\frac{1}{2}; 3)$; е) $f(x) = -\cos x$, $M(\frac{\pi}{2}; 0)$.

24. Нуқта аз рӯйи хатти рост бо шитоби $a(t)$ ҳаракат мекунад. Дар лаҳзаи ибтидоии t_0 координатааш ба x_0 ва суръаташ ба $\mathcal{G}_0$ баробар аст. Координатаи $x(t)$ -ро чун функсияи вақт ёбед:

а) $a(t) = -t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 4$, $\mathcal{G}_0 = -3$;

б) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 0$, $g_0 = 0$.

Машиқҳо барои такрор

25. Экстремуми функсияи $y = 2 - 2x - x^2$ -ро ёбед.

26. Ифодаро сода кунед:

$$\frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha - 30^\circ)}.$$

27. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$$

28. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}$ -ро ёбед.

4. ҚОИДАҲОИ СОДАТАРИНИ ЁФТАНИ ФУНКСИЯҲОИ ИБТИДОӢ

Бо сабаби он ки масъалаи ёфтани функсияи ибтидоӣ нисбат ба масъалаи ёфтани ҳосила баръакс аст, ҳар яке аз ин се қоида ба қоидаҳои мувофиқи ҳосилагирӣ монанданд.

1⁰. Функсияи ибтидоии суммаи ду функсия. Агар $F(x)$ барои $f(x)$ ва $G(x)$ барои $g(x)$ функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ $F(x) + G(x)$ барои $f(x) + g(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.

Дар ҳақиқат, азбаски $F'(x) = f(x)$ ва $G'(x) = g(x)$ аст, пас

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

М и с о л и 1. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи

$$f(x) = x^2 + \cos x$$

меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $\frac{x^3}{3}$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи x^2 , $\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $\cos x$ аст, пас мувофиқи қоидаи 1⁰ функсияи $\frac{x^3}{3} + \sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x) = x^2 + \cos x$ мебошад.

$$\text{Ҷ а в о б: } F(x) = \frac{x^3}{3} + \sin x + C.$$

М и с о л и 2. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

меёбем.

Ҳ а л. Ба монанди ҳалли мисоли пешина мулоҳиза ронда, ҷадвали функсияҳои ибтидоиро истифода карда мебинем, ки функсияи $\operatorname{tg} x + 2\sqrt{x}$ барои $f(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоист.

$$\text{Ҷ а в о б: } F(x) = 2\sqrt{x} + \operatorname{tg} x + C.$$

2⁰. Функсияи ибтидоии функсияи ҳосили зарби адад бар функсия. Агар $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ ва k бузургии доимӣ бошад, он гоҳ $kF(x)$ барои $kf(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.

Дар ҳақиқат, азбаски зарбшавандаро аз зери аломати ҳосила баровардан мумкин аст, пас

$$(kF(x))' = k(F(x))' = kf(x).$$

Ин баробарӣ дурустии қоида ро нишон медиҳад.

М и с о л и 3. Барои функсияи $f(x) = 7 \sin x$ функсияи ибтидоиро меёбем.

Ҳ а л. Барои $\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $-\cos x$ аст. Пас, мувофиқи ин қоида $-7 \cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоист.

$$\text{Ҷ а в о б: } F(x) = -7 \cos x + C.$$

М и с о л и 4. Функсияи ибтидоиро барои функсияи $f(x) = 5 \cos x + 2x^4$ меёбем.

Ҳ а л. Аввал қоидаи 2^0 , баъд аз он қоидаи 1^0 -ро татбиқ карда, мувофиқи қадвали функсияҳои ибтидоӣ ҳосил мекунем:

$$F(x) = 5 \sin x + \frac{2}{5} x^5 + C.$$

М и с о л и 5. Қуввае, ки ба ҷисми массааш m таъсир мекунад, аз рӯйи қонуни синусоида тағйир меёбад: $F = A \sin t$, ки $A > 0$ аст. Дар зери таъсири ин қувва ҷисм ростхатта ҳаракат мекунад. Маълум аст, ки ҳангоми $t = 0$ будан, суръати ҷисм $\mathcal{V}_0$ аст. Ба чанд баробар будани суръатро дар лаҳзаи дилхоҳи t муайян мекунем.

Ҳ а л. Аз рӯйи қувва шитобро мувофиқи қонуни Нютон меёбем: $a = \frac{F}{m} = \frac{A}{m} \sin t$. Суръат функсияи ибтидоии шитоб

аст, барои ҳамин $\mathcal{V}(t) = -\frac{A}{m} \cos t + C$, ки дар ин ҷо C доимии

дилхоҳ аст. Мувофиқи шарт $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(0) = -\frac{A}{m} + C$, пас

$$C = \mathcal{V}_0 + \frac{A}{m}. \text{ Ҳамин тариқ, } \mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 + \frac{A}{m} - \frac{A}{m} \cos t.$$

3⁰. Функцияи ибтидоии функцияи $f(kx + b)$. Агар $F(x)$ функцияи ибтидоии $f(x)$, k ва b доимиҳо ($k \neq 0$) бошанд, он гоҳ $\frac{1}{k}F(kx + b)$ функцияи ибтидоии функцияи $f(kx + b)$ мебошад.

Дар ҳақиқат, мувофиқи шарт $F'(kx + b) = f(kx + b)$ ва қоидаи ҳосилагирии функцияи мураккаб дорем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k} F(kx + b) \right)' &= \frac{1}{k} (F(kx + b))' = \frac{1}{k} F'(kx + b) \cdot (kx + b)' = \\ &= \frac{1}{k} F'(kx + b) \cdot k = F'(kx + b) = f(kx + b). \end{aligned}$$

Мисоли 6. Барои функцияи $f(x) = \cos(7x - 9)$ яке аз функцияҳои ибтидоиро меёбем.

Ҳал. Барои $\cos x$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ $\sin x$ аст. Бинобар ин аз рӯйи қоидаи 3⁰ $F(x) = \frac{1}{7} \sin(7x - 9)$ функцияи ибтидоии матлуб аст.

Мисоли 7. Барои функцияҳои: а) $f(x) = (3x + 5)^7$ ва б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{10x - 7}}$ функцияҳои ибтидоиро меёбем.

Ҳал. а) Барои функцияи x^7 яке аз функцияҳои ибтидоӣ $\frac{x^8}{8}$ аст. Пас, мувофиқи қоидаи 3⁰ функцияи $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(3x + 5)^8}{8} \right) = \frac{1}{24} (3x + 5)^8$ барои $(3x + 5)^7$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ мебошад. Хамин тариқ, $F(x) = \frac{1}{24} (3x + 5)^8 + C$.

б) Барои функцияи $\frac{1}{\sqrt{x}}$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ $2\sqrt{x}$

аст. Пас, аз рӯйи қоидаи 3^0 функцияи
 $\frac{1}{10} \cdot 2\sqrt{10x-7} = \frac{1}{5}\sqrt{10x-7}$ барои $\frac{1}{\sqrt{10x-7}}$ яке аз

функцияҳои ибтидоӣ мебошад. Инак,

$$F(x) = \frac{1}{5}\sqrt{10x-7} + C.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии ҳонандагон

1. Қоидаи якуми ёфтани функцияҳои ибтидоиро баён карда, онро бо мисолҳои мушаххас шарҳ диҳед.

2. Қоидаи дуҷуми ёфтани функцияҳои ибтидоиро баён кунед ва онро бо мисолҳои мушаххас тавзеҳ диҳед.

3. Қоидаи сеҷуми ёфтани функцияҳои ибтидоиро баён кунед ва онро бо мисолҳои мушаххас фаҳмонед.

4. Ин қоидаҳо ба кадом қоидаҳои ҳосилагирӣ монанданд?

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Намуди умумии функцияҳои ибтидоии $f(x)$ - ро ёбед (29-31):

29. а) $f(x) = 4x + x^2 - \frac{1}{x^2}$; б) $f(x) = x - \frac{4}{x^4} + \sin x$;

в) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 4\sin x$.

30. а) $f(x) = (3x-1)^6$; б) $f(x) = (2-5x)^3$;

в) $f(x) = \sin(9x+1)$; г) $f(x) = \cos(4x-9)$.

31*. а) $f(x) = \frac{4}{(2-7x)^3}$; б) $f(x) = \frac{2}{(4-3x)^4}$;

в) $f(x) = \frac{3}{\cos^2(4x-1)}$; г) $f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\sin^2(3x+1)}$.

32. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^3}$, $M(-2; 1)$;

б) $f(x) = x^4 - 1$, $M(2; 10)$;

в) $f(x) = 1 - 3x$, $M(2; 3)$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 8x^5 + 2$, $M(1; 7)$.

33*. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ -ро ёбед:

а) $f(x) = 1 - \sin 6x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x} + \frac{1}{\sqrt[5]{3-x}} - 2x^3$;

в) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(4x+1)} - 4 \cos(2-x) + 3x$;

г) $f(x) = \frac{1}{(4-2x)^3} + \frac{2}{\sqrt{7x-1}} - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

34. Суръати нуқтаи ростхатта ҳаракаткунанда бо формулаи $\mathcal{A}(t) = t^2 - 3t + 1$ ифода мешавад. Агар дар лаҳзаи ибтидоии вақт ($t = 0$) нуқта дар ибтидои координатаҳо бошад, вобастагии координатаи он x -ро ба вақти t бо воситаи формула нависед.

35. Нуқта бо шитоби $a(t) = 8t^2 + 5$ ростхатта ҳаракат мекунад. Агар дар лаҳзаи $t = 0$ суръати он ба 8 м/с ва координатааш ба 16 баробар бошад, қонуни ҳаракати нуқтаро ёбед.

36. Нуқтаи массааш m аз рӯйи тири абсисса дар зери қуввае ҳаракат мекунад, ки он қад-қадӣ ҳамин тир равон

шудааст. Дар лаҳзаи вақти t қувва ба $F(t)$ баробар аст. Агар ҳангоми $t = t_0$ будан, суръати нуқта ба $\mathcal{G}_0$ ва координатааш ба x_0 баробар бошад, формулаи вобастагии $x(t)$ -ро аз вақти t ёбед ($F(t)$ -ба ҳисоби Нютон, t -ба ҳисоби сония, $\mathcal{G}$ -ба ҳисоби метр дар сония, m -ба ҳисоби килограмм):

а) $F(t) = 3 - 6t$, $t_0 = 1$, $\mathcal{G}_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;

б) $F(t) = 8 \sin t$, $t_0 = \pi$, $\mathcal{G}_0 = 3$, $x_0 = 2$, $m = 6$.

Машқҳо барои тақрор

37. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ - ро дар порчаи $[-1; 3]$ ёбед.

38. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

39. Решаи дар фосилаи $(0^0; 180^0)$ воқеъбудаи муодилаи

$$\sin x - 1 = 0,5 \sin 2x - \cos x$$

-ро ёбед.

40. Барои кадом қиматҳои c муодилаи $x^2 + 2x + c = 0$ реша надорад? Қимати хурдтарини бутуни чунин c -ро нишон диҳед.

41. Аз шахри A ба шахри B , ки масофаи байни онҳо 120 км аст, дар як вақт ду велосипедрон ҳаракат карданд. Суръати велосипедрони якум назар ба суръати велосипедрони дуюм 3 км/соат зиёдтар буд, бинобар ин ӯ ба шахри B 2 соат пештар омада расид. Суръати ҳар як велосипедронро ёбед.

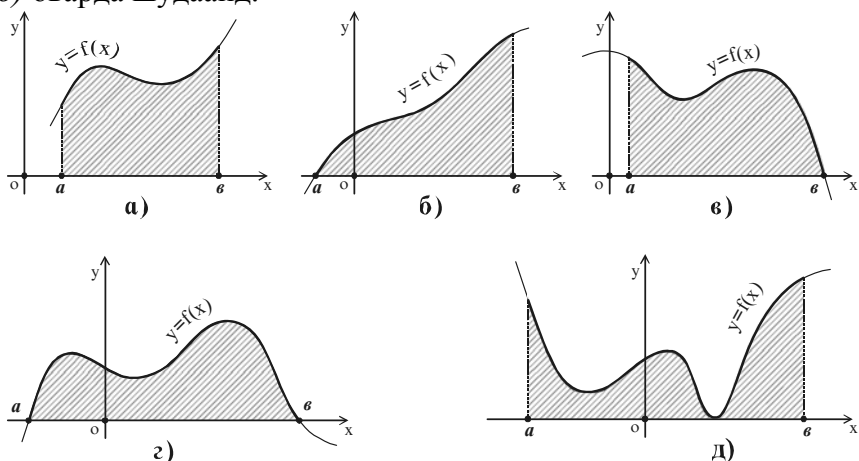
§2. ИНТЕГРАЛ

5. МАСОҲАТИ ТРАПЕТСИЯИ КАЧХАТТА

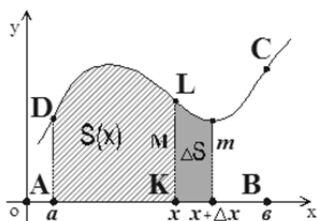
Бигузур дар порчаи $[a; b]$ функсияи бефосилаи $y = f(x)$ дода шудааст, ки доималомат мебошад. Барои муайяни фарз мекунем, ки функсияи додашуда ғайриманфӣ аст, яъне барои ҳар гуна $x \in [a; b]$ $f(x) \geq 0$.

Т а ъ р и ф. **Фигурае, ки бо графики функсияи ғайриманфӣ, порчаи $[a; b]$, хатҳои рости $x = a$ ва $x = b$ маҳдуд аст, трапетсияи качхатта номида мешавад.**

Шаклҳои гуногуни трапетсияи качхатта дар расми 2, а) – д) оварда шудаанд.



Расми 2.



Расми 3.

Бо S масоҳати трапетсияи качхаттаро ишорат мекунем. Бо мақсади ёфтани S рафтори масоҳати фигураи тағйирёбандаи $AKLD$ –ро, ки он бо хатҳои рости $x = a$ ва KL , графики $y = f(x)$ дар порчаи $[a; x]$ ва

худи ҳамин порча маҳдуд аст (расми 3), меомӯзем. Ин масоҳатро бо $S(x)$ ишорат мекунем (Ҳангоми тағйир ёфтани x масоҳати номбурда мувофиқан тағйир меёбад. Яъне масоҳати трапетсияи қатъаттаи AKLD функсияи аргументаш x аст.). Функсияи ҳозир дохилкардаамон дорои хосияти ачибе аст, ки онро дар шакли теорема меорем.

Т е о р е м а . Функсияи $S(x)$ барои функсияи $y = f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.

И с б о т. Ҳосилаи функсияи $S(x)$ -ро меёбем. Бо ин мақсад ба x ягон афзоиши (масалан, мусбати) Δx медиҳем. Масоҳати $S(x)$ афзоиши $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$ -ро қабул мекунад (расми 3).

Бо m ва M мувофиқан киматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[x; x + \Delta x]$ ишорат карда, масоҳати ΔS -ро бо масоҳатҳои росткунҷаҳое муқоиса мекунем, ки асосашон Δx буда, баландиҳояшон m ва M мебошанд. Зоҳиран фаҳмост, ки

$$m\Delta x < \Delta S < M\Delta x$$

аст. Аз ин ҷо:

$$m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M.$$

Азбаски функсияи бефосила дар порчаи $[m; M]$ тамоми киматҳои мобайниро қабул мекунад, пас чунин нуқтаи $c \in [x; x + \Delta x]$ ёфт мешавад, ки $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(c)$ (Ин баробарӣ ҳангоми $\Delta x < 0$ будан низ дуруст аст.). Акнун Δx -ро ба нул майл мекунонем ва мебинем, ки порчаи $[x; x + \Delta x]$ бо нуқтаи x якҷоя мешавад, яъне ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ $f(c) \rightarrow f(x)$. Инак,

ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$. Ин наздикшавӣ нишон медиҳад, ки $S'(x) = f(x)$. Теорема исбот шуд.

Х у л о с а. Ҳангоми дар порчаи $[a; b]$ бефосила ва доималомат будани функсияи $y = f(x)$ масоҳати трапетсияи қачхаттаи $ABCD$ (расми 3) ба афзониши яке аз функсияҳои ибтидоӣ дар порчаи $[a; b]$ баробар аст, яъне

$$S = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи теоремаи ҳозир исботкардаамон ва хосияти асосии функсияи ибтидоӣ

$$S(x) = F(x) + C,$$

ки дар он $F'(x) = f(x)$ аст. Дар баробарии болоӣ $x = a$ гузошта, доимии C -ро меёбем: $0 = S(a) = F(a) + C$, яъне $C = -F(a)$. Пас,

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

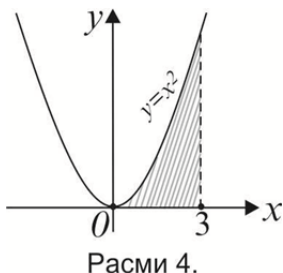
Барои ҳосил кардани масоҳати ҳамаи трапетсияи қачхаттаи $ABCD$ $x = b$ гузоштан лозим аст:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Э з о х. Формулаи (2) ҳангоми дар порчаи $[a; b]$ гуногуналломат будани $y = f(x)$ низ дуруст аст. Барои исбот порчаи $[a; b]$ -ро ба k ҳисса ҷудо кардан даркор аст, ки дар ҳар як ҳиссаи $[x_i; x_{i+1}]$ ($x_0 = a, x_k = b$) функсияи $y = f(x)$ доималомат мебошад. Формулаи (2) барои ҳар як ҳисса дуруст аст, яъне $S_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ масоҳати трапетсияи қачхаттаи бо ин ҳисса, графики $y = f(x)$, хатҳои ростии $x = x_i$ ва $x = x_{i+1}$ маҳдудбуда мебошад. Фаҳмост, ки

$$\begin{aligned}
 S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} = \\
 &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \dots \\
 &\dots + (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a).
 \end{aligned}$$

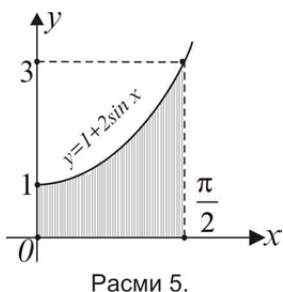
М и с о л и 1. Масоҳати трапетсияи қачхаттаи бо графики функсияи $f(x) = x^2$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 3$ маҳдудро меёбем.



Ҳ а л. Графикхоро схемавӣ кашида, масоҳати матлубро бо хатҳои рах-рах қайд мекунем (расми 4).

Функсияи $f(x) = \frac{x^3}{3}$ барои функсияи $f(x) = x^2$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$



М и с о л и 2. Масоҳати трапетсияи қачхаттаи бо графики функсияи $f(x) = 1 + 2\sin x$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ маҳдудро ҳисоб

мекунем (расми 5).

Ҳ а л. Функсияи $F(x) = x - 2\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} - (0 - 2\cos 0) = \frac{\pi}{2} + 2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна фигура трапетсияи қачхатта номида мешавад?
2. Магар ҳамаи шаклҳои ин гуна трапетсияҳо ҳангоми

доималомат будани функсия дар расми 2 нишон дода шудаанд?

3. Масоҳати трапетсияи қачхаттаро аз рӯйи кадом формула ёфтан мумкин аст?

4. Дар формулаи масоҳати трапетсияи қачхатта функсияи $y = f(x)$ бояд дорои кадом хосиятҳо бошад?

Машиқҳо барои мустақкам кардани маводди назариявӣ

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ёбед (42-44):

42. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$;

в) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

г) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

43. а) $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = 1 + \frac{\sin x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

в) $y = 1 + 2 \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

г) $y = 16 - x^2$, $y = 0$.

44. а) $y = (x+1)^2$, $y = 0$, $x = 1$;

б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

в) $y = x - x^2$, $y = 0$;

г) $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

Машқҳо барои такрор

45*. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ -ро ёбед, агар $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x+1)} + \sqrt{6x-5} + 2x^4$ бошад.

46. Ҳисоб кунед: $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}$.

47. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

48. Муодилаи $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$ -ро дар порчаи $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ҳал кунед ва ҷавобро бо градус нависед.

49. Фосилаҳои монотонӣ, экстремум ва экстремали функсияи $f(x) = 6x - 8x^3$ -ро ёбед.

6. ЁФТАНИ МАСОҲАТИ ФИГУРАҲО

Мо аллакай масоҳати трапетсияи қатъшудаеро, ки бо хатҳои $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ маҳдуд аст, ҳисоб карда метавонем (ниг. ба формулаи (2) дар банди 5). Дар айни ҳол функсияи $f(x)$ ғайриманфӣ ҳисоб карда мешавад.

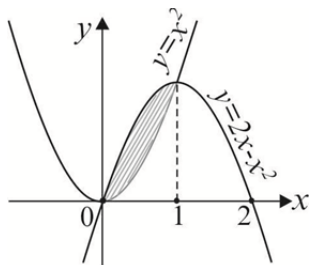
Акнун ба ҳисоби масоҳати фигураҳое шурӯъ мекунем, ки онҳо дар натиҷаи буриши ду ё якчанд хати қатъ ҳосил мешаванд. Дар ҳалли мисолҳои мушаххас *схемаи умумии* ёфтани чунин масоҳатҳоро нишон медиҳем.

М и с о л и 1. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y = x^2$ ва $y = 2x - x^2$ маҳдуд аст, меёбем.

Ҳ а л. 1. Фигураи додашударо схемавӣ тасвир мекунем (расми 6).

2. Абсиссаҳои нуктаҳои буриши графикҳои функсияҳоро меёбем:

$$x^2 = 2x - x^2; x^2 = x; x(x-1) = 0; x = 0 \text{ ва } x = 1.$$



Расми 6.

3. Масоҳати трапетсияи качхаттаро, ки аз боло бо графики функсияи $y = 2x - x^2$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, меёбем. Барои ин функсияи ибтидоии ин функсияро ёфта, формулаи (2)-ро татбиқ мекунем. Яке аз функсияҳои ибтидоӣ функсияи

$F(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$ аст. Пас, масоҳати ин трапетсияи качхатта

$$S_2 = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ аст.}$$

4. Масоҳати трапетсияи качхаттаро, ки бо хатҳои $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, меёбем. Яке аз функсияҳои ибтидоӣ бо формулаи $F(x) = \frac{x^3}{3}$ дода мешавад. Барои ҳамин

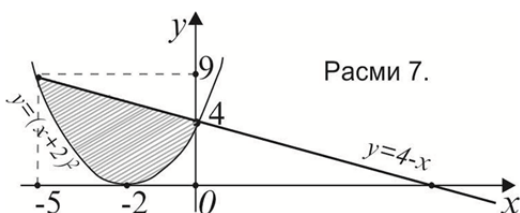
$$S_1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

5. Масоҳати фигураи матлубро ҳамчун фарқи масоҳатҳо меёбем:

$$S = S_2 - S_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

М и с о л и 2. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = (x+2)^2$ ва $y = 4 - x$ маҳдудро меёбем.

Ҳ а л. Мувофиқи схемаи дар ҳалли мисоли 1 истифода кардаамон амал мекунем.



Расми 7.

1. Графики функция-хоро сохта, соҳаи заруриро бо хати рах - рах қайд мекунем (расми 7).

2. Абсиссаҳои нукта-ҳои буриши графикхоро меёбем:

$$(x+2)^2 = 4-x; \quad x^2 + 4x + 4 = 4-x; \quad x^2 + 5x = 0;$$

$$x(x+5) = 0; \quad x = -5, \quad x = 0.$$

3. Масоҳати бо хатҳои $y = 4-x$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 0$ маҳдудро меёбем. Функцияи $F(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ барои $y = 4-x$ аст. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S_2 = F(0) - F(-5) = 0 - \left(4 \cdot (-5) - \frac{(-5)^2}{2} \right) = 20 + \frac{25}{2} = 32\frac{1}{2}.$$

4. Акнун масоҳати бо хатҳои $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 0$ маҳдудро меёбем. Азбаски $F(x) = \frac{(x+2)^3}{3}$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ аст, пас:

$$S_1 = F(0) - F(-5) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3} + 9 = 11\frac{2}{3}.$$

5. Масоҳати матлуб ба фарқи масоҳатҳои ёфташуда баробар аст:

$$S = S_2 - S_1 = 32\frac{1}{2} - 11\frac{2}{3} = \frac{65}{2} - \frac{35}{3} = \frac{195 - 70}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Зинаҳои схемаи умумии ёфтани масоҳати фигураеро, ки дар натиҷаи буриши ду ё якчанд хати қавқ ҳосил мешавад,

номбар кунед.

2. Нишон диҳед, ки ин схема барои ҳисоби масоҳати трапетсияи қачхаттае, ки аз болову поён бо хатҳои қач маҳдуд аст, низ татбиқшаванда аст.

3. Шумо мисоли трапетсияи қачхаттаро аз амалия оварда метавонед?

4. Барои чӣ фигураеро, ки бо хатҳои рости $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ва функсияи $y = f(x)$ маҳдуд аст, трапетсияи қачхатта меноманд?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (50-53):

50.а) $y = 2 + x - x^2$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 2x$;

в) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

г) $y = \cos 0,1x$, $y = 0$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = 5\pi$.

51.а) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 6x$;

в) $y = (x-3)^2$, $y = 9 - 2x$; г) $y = -x^2 + 3$, $y = 0$.

52.а) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = x^3$, $y = \sqrt[4]{x}$;

в) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$; г) $y = x^2$, $y = 1 - x^2$.

53*. а) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $x > 0$;

в) $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$, $x > 0$;

г) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 2$, $x > 0$.

Машиқҳо барои такрор

54. Ҳисоб кунед:

$$\left(3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{5}\right) \cdot 20 - \left(\frac{11}{12} - \frac{2}{3}\right) : \frac{3}{12}.$$

55. Ифодаро сода кунед:

$$1 + \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}}.$$

56. Муодилаи $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$ -ро ҳал кунед.

57. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$\sqrt{1-2x+x^2} = x+1.$$

58. Функцияи ибтидоии функцияи $f(x) = \cos(4x-5)$ -ро ёбед.

7. МАҲҲУМИ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛАИ НЮТОН-ЛЕЙБНИТС

1⁰. Масъалаи ҳисоби масоҳати трапетсияи қатъатгаро аз нуқтаи назари дигар муоина мекунем. Бигузор функцияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ ғайриманфӣ ва бефосила аст. Масоҳати трапетсияи қатъатта S -ро тақрибӣ ҳисоб кардан мумкин аст.

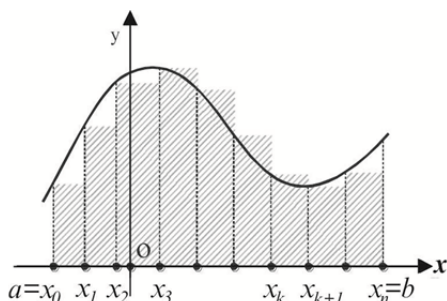
Порчаи $[a; b]$ - ро бо ёрии нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ба n порчаҳои дарозиашон якхела чудо мекунем. Бигузор $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$ дарозии порчаи $[x_{k-1}; x_k]$ аст, ки дар ин ҷо $k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ мебошад. Дар ҳар яке аз порчаҳои $[x_{k-1}; x_k]$ чун дар асос, росткунҷаи баландиаш $f(x_{k-1})$ -ро месозем. Масоҳати ин росткунҷа ба

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

ва суммаи масоҳатҳои тамоми ҳамин гуна росткунҷаҳо ба

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

баробар аст (расми 8).



Расми 8.

Аз сабаби бефосила будани $f(x)$ ҳангоми ниҳоят калон будани n , яъне ҳангоми ниҳоят хурд будани Δx , ҳар яке аз росткунҷаҳои сохташуда бо қисми трапетсияи қачхаттаи мазкур қариб ҳамҷоя мешавад. Бо ибораи дигар,

ҳангоми ниҳоят калон будани n фарзияи ҷой доштани баробарии тақрибии $S_n \approx S$ ба миён меояд (Инро кӯтоҳ ин тавр мегӯянд: «ҳангоми ба беохирӣ майл кардани n , S_n ба S майл мекунад» ва чунин менависанд: ҳангоми $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow S$).

Ин фарзия амалан дуруст аст. Бар замми ин, барои ҳар гуна функсияи $f(x)$ -и дар порчаи $[a; b]$ бефосила (ғайриманфӣ буданаш шарт нест) ҳангоми $n \rightarrow \infty$, S_n ба ягон адад майл мекунад. Мувофиқи таъриф ин ададро интеграли функсияи

$f(x)$ аз a то b меноманд ва бо $\int_a^b f(x)dx$ ишорат мекунанд,

яъне:

$$\text{ҳангоми } n \rightarrow \infty, \quad S_n \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

Хонда мешавад: «Интеграл аз a то b эф аз икс дэ икс».

Ададҳои a ва b ҳудудҳои интеграл номида мешаванд: a - ҳудуди поёӣ, b - ҳудуди болоӣ. Рамзи $\int$ ишорати интеграл аст. Функсияи $f(x)$ *функсияи зеринтегралӣ* ва тағйирёбандаи x бошад, *тағйирёбандаи интегралгирӣ* ном дорад.

Ҳамин тариқ, агар дар порчаи $[a; b]$ нобаробарии $f(x) \geq 0$ ҷой дошта бошад, он гоҳ масоҳати трапетсияи қатъаттаи мувофиқ S бо формулаи

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

ифода мешавад.

2⁰. Дар банди 5 дида будем, ки масоҳати трапетсияи қатъаттаи аз боло бо графики $y = f(x)$ маҳдудбуда бо формулаи (2), яъне бо формулаи $S = F(b) - F(a)$ ҳисоб мешавад. Инро бо баробарии (3) муқоиса намуда, натиҷаи зеринро ҳосил мекунем: *агар дар порчаи $[a; b]$ функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ*

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

аст. Баробарии (4) *формулаи Нютон-Лейбнитс* ном дорад. Вай барои функсияи дилхохи дар порчаи $[a; b]$ бефосилаи $f(x)$ дуруст аст. Фарқи $F(b) - F(a)$ -ро, ки афзоиши $F(x)$ дар порчаи $[a; b]$ аст, бо $F(x) \Big|_a^b$ ишорат мекунанд ва формулаи

Нютон-Лейбнитс (4)-ро кӯтоҳ ин тавр менависанд:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (5)$$

Акнун мисолҳои татбиқи формулаи Нютон – Лейбнитсро

дида мебароем.

М и с о л и 1. Интеграл $\int_{-2}^3 x^2 dx$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Функцияи $F(x) = \frac{x^3}{3}$ барои $f(x) = x^2$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ аст, бинобар ин мувофиқи (5) ҳосил мекунем:

$$\int_{-2}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 9 + \frac{8}{3} = 11\frac{2}{3}.$$

М и с о л и 2. Интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Дорем:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Э з о ҳ. Қайд мекунем, ки формулаи (4) (ё (5)) ҳангоми $b < a$ будан низ дуруст аст. Бар замми он $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ мебошад. Инчунин, баробариҳои

$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ва $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k -доимӣ) дурустанд.

М и с о л и 3. Интеграл $\int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Дорем:

$$\int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}.$$

М и с о л и 4. Интеграл $\int_1^2 (2x^2 + 3x) dx$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Аз хосиятҳои интеграл, ки дар эзоҳ оварда шудаанд, истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x^2 + 3x) dx &= \int_1^2 2x^2 dx + \int_1^2 3x dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \\ &= 2 \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + 3 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = 2 \cdot \frac{7}{3} + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{14}{3} + \frac{9}{2} = \frac{28+27}{6} = \frac{55}{6} = 9\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

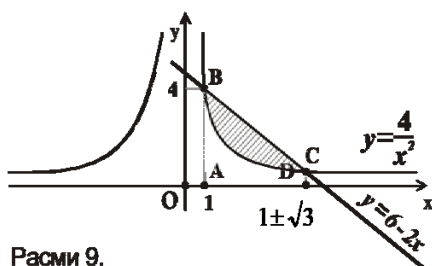
М и с о л и 5. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = \frac{4}{x^2}$ ва $y = 6 - 2x$ маҳдудро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Схемаи дар банди 6 овардаамонро татбиқ мекунем.

Нуктаҳои буриши графикҳоро меёбем: $\frac{4}{x^2} = 6 - 2x$;

$$4 = 6x^2 - 2x^3; \quad x^3 - 3x^2 + 2 = 0; \quad (x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0;$$

$x-1=0$; $x=1$; $x^2 - 2x + 2 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Инак, нуктаҳои буриш $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$ мебошанд.



Расми 9.

Ҳамин тариқ, масоҳати трапетсияи мазкур ба фарқи масоҳати трапетсияи ростхаттаи ABCD ва масоҳати трапетсияи қачхаттаи ABCD баробар аст (расми 9).

Мувофиқи формулаи (5) дорем:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^{1+\sqrt{3}} (6-2x)dx - \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{4dx}{x^2} = (6x-x^2) \Big|_1^{1+\sqrt{3}} - \left(-\frac{4}{x}\right) \Big|_1^{1+\sqrt{3}} = \\
 &= (6+6\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}-3) - (6-1) + \frac{4}{\sqrt{3}+1} - 4 = 4\sqrt{3}-3 + \\
 &+ \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1} - 4 = 4\sqrt{3}-3 + 2\sqrt{3}-2-4 = 6\sqrt{3}-9.
 \end{aligned}$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Интегралҳои функсия дар порчаи $[a; b]$ чиро мегӯянд?
2. Формулаи Нютон – Лейбнитсро нависед.
3. Барои чӣ гуна функсияи зеринтегралӣ формулаи Нютон – Лейбнитс дуруст аст?
4. Интегралҳои муайян бо масоҳати трапетсияи қачхатта чӣ гуна алоқамандӣ дорад?
5. Интегралро чӣ гуна ишорат мекунам?
6. Агар ҳудудҳои интегралро иваз кунем, қимати он тағйир меёбад?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Интегралҳоро ҳисоб кунед (59-63):

59. а) $\int_0^2 x^3 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; в) $\int_{-1}^3 x^2 dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.
60. а) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$; б) $\int_0^3 (1+3x^2) dx$;

$$\begin{array}{ll}
 \text{в)} \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x \right) dx ; & \text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 6x \, dx . \\
 \text{61* а)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \, dx ; & \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) dx ; \\
 \text{в)} \int_0^{\pi} \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) dx ; & \text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x} . \\
 \text{62 а)} \int_0^8 (2x + \sqrt[3]{x}) dx ; & \text{б)} \int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx ; \\
 \text{в)} \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}) dx ; & \text{г)} \int_{-2}^{-1} (x^{-3} - x) dx . \\
 \text{63 а)} \int_0^3 (x-3)(x+3) dx ; & \text{б)} \int_0^2 (2x+3)^3 dx ; \\
 \text{в)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx ; & \text{г)} \int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} .
 \end{array}$$

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (64-67):

$$\begin{array}{ll}
 \text{64 а)} y = x^2, y = 0, x = 3; & \text{б)} y = x^3, y = 1, x = 0; \\
 \text{в)} y = \frac{x}{3}, y = x, x = 1; & \text{г)} y = \sqrt{x}, y = 3, x = 0. \\
 \text{65 а)} y = 2 \cos x, \quad y = 1, \quad x = -\frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{\pi}{3}; \\
 \text{б)} y = \sin x, \quad y = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6}; \\
 \text{в)} y = 4x - x^2, y = 0; & \text{г)} y = x^2 - 7x + 10, y = 0.
 \end{array}$$

66. а) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 1 - x$; б) $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$;
 в) $y = x^2$, $y = 2 - x$; г) $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x - 2$.

67. а) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$;
 б) $y = (x - 2)^2$, $y = 4 - x^2$;
 в) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$;
 г) $y = x^2$, $y = x^3$.

68. Масоҳати фигураеро ҳисоб кунед, ки он бо графики функсияи $y = 6x - 2x^2$, расанда ба ин парабола дар қуллаи он ва хати ростии $x = 0$ маҳдуд шудааст.

69. Масоҳати фигураеро ҳисоб кунед, ки он бо графики функсияи $f(x) = 4 - 0,5x^2$, расанда ба он дар нуқтаи абсиссааш $x = -1$ ва хати ростии $x = 1$ маҳдуд шудааст.

Машқҳо барои такрор

70. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна n -и натуралӣ адади $n^3 + 3n^2 + 5n$ ба 3 тақсим мешавад.

71. Намуди умумии функсияҳои ибтидоиро ёбед:

а) $f(x) = \sqrt[3]{4x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$;
 б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{3x+2}} + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$.

72. Муодилаи ирратсионалиро ҳал кунед:

$$\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2} = 1.$$

73*. Нобаробариро ҳал кунед: $\frac{6}{(x+2)(x-3)} - \frac{1}{x+2} > 3$.

8. БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ ИНТЕГРАЛ

Мо аллақай як татбиқи интегралро муоина намудем: интеграл ҳамчун аслиҳа барои ҳисоб кардани масоҳати трапетсияи қачхатта.

Мафҳуми интеграл дар геометрия, физика, техника, ҷомеашиносӣ ва дигар илмҳо васеъ истифода мешавад. Ҳоло ду татбиқи дигари интегралро дида мебароем.

1⁰. Масофаи тайкардаи ҷисм. Агар ҷисм ғайримунтазам ба як самт ҳаракат карда, суръаташ вобаста ба вақт тағйир ёбад, яъне $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ бошад, он гоҳ масофае, ки ин ҷисм дар муддати вақти аз t_1 то t_2 тай мекунад,

$$S(t_2) - S(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{V}(t) dt$$

мебошад. Ин аз баробарии $S'(t) = \mathcal{V}(t)$, яъне аз он ки $S(t)$ барои $\mathcal{V}(t)$ функсияи ибтидоӣ аст ва аз формулаи Нютон – Лейбнитс бармеояд.

М и с о л и 1. Суръати ҷисм (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $\mathcal{V}(t) = 4t - t^2$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм аз ибтидои ҳаракат то бозистоданаш тай мекунад, меёбем.

Ҳ а л. Муҳлати ҳаракати ҷисмро муайян мекунем:

$$4t - t^2 = 0; \quad t(4 - t) = 0; \quad t = 0, \quad t = 4.$$

Яъне баъди 4 сония ҷисм ҳаракатро қатъ мекунад. Барои ҳамин

$$S = \int_0^4 (4t - t^2) dt = \left(2t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} = 10 \frac{2}{3} \text{ м.}$$

М и с о л и 2. Ҷисм, ки суръаташ аз рӯйи қонуни $\mathcal{V}(t) = 29,4 - 9,8t$ (бо м/сония) тағйир меёбад, амудӣ ба боло

партофта шудааст. Баландии калонтарини болобарои чисмро меёбем.

Ҳа л. Вақтеро, ки дар муҳлати он чисм ба боло мебарояд, меёбем: $29,4 - 9,8t = 0$, $t = 3$ сония. Баландии калонтарини болобарои ҳисоб мекунем:

$$h = \int_0^3 (29,4 - 9,8t) dt = \left(29,4t - \frac{9,8}{2} t^2 \right) \Big|_0^3 = 29,4 \cdot 3 - 4,9 \cdot 3^2 = 44,1 \text{ м.}$$

2⁰. Кори қувваи тағйирёбанда. Тавре аз курси физика медонем, кори қувваи доимии P бо формулаи $A = PS$, ки S кӯчиш аст, чен карда мешавад. Акнун ҳангоми тағйирёбанда будани қувва барои кор формула ҳосил мекунем.

Бигузор дар тири OX ба чисм қувваи тағйирёбандаи бефосилаи $P = f(x)$ таъсир кунад. Кори қувваи P -ро, ки чисм зери таъсири он аз нуқтаи $x = a$ то нуқтаи $x = b$ ҷойиваз мешавад, ҳисоб мекунем. Бо ин мақсад порчаи $[a; b]$ - ро ба n ҳиссаи баробар ҷудо мекунем, яъне $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқтаҳои тақсимот

буда, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ дарозии ҳар як ҳисса аст. Дарозии ҳар як

ҳиссаро, ки дарозии порчаи $[x_{k-1}; x_k]$ аст, хурд ҳисоб карда, функсияи $f(x)$ -ро дар ин порча тахминан ба $f(x_{k-1})$ баробар фарз мекунем ($k = 1, 2, \dots, n-1, n$). Бо ин фарзия мебинем, ки кор дар $[x_{k-1}; x_k]$ тахминан $f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = f(x_{k-1})\Delta x$ аст. Кори қувва дар тамоми порчаи $[a; b]$ бошад, тахминан ба суммаи корҳо дар ҳиссаҳо баробар аст, яъне ба

$$\begin{aligned} A_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})). \end{aligned}$$

Мувофиқи қисми 1⁰-и банди 7 ҳангоми $n \rightarrow \infty$, A_n ба A майл мекунад, яъне

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

М и с о л и 3. Қувваи 10 Н фанар (пружина)-ро 2 см меёзонад. Чӣ қадар қор иҷро кардани ин қувваро меёбем.

Ҳ а л. Аз рӯйи қонуни Гук қуввае, ки фанарро ба бузургии x меёзонад, бо формулаи $f(x) = kx$ ҳисоб мешавад, ки дар ин ҷо k -коэффитсиенти мутаносибӣ аст. Нуқтаи $x = 0$ ба ҳолати озоди фанар мувофиқ меояд. Дар асоси шарти масъала $k = \frac{10 \text{ Н}}{0,02 \text{ м}} = 500 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, пас $f(x) = 500x$. Ҳамин тариқ, мувофиқи формулаи (6):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{0,02} 500x dx = \frac{500x^2}{2} \Big|_0^{0,02} = 250 \cdot (0,02)^2 = \\ &= 250 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 = 1000 \cdot 10^{-4} = 10^{-1} = 0,1 \text{ Ҷ}. \end{aligned}$$

Э з о ҳ. Яке аз муҳимтарин соҳаҳои татбиқи интеграл ин ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои геометрӣ аст, ки мо онро партофта гузаштем. Ин татбиқ дар курси геометрия муфасссал омӯхта мешавад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Кадом татбиқоти интегралро медонед?
2. Масофаи тайкардаи ҷисмро кадом вақт бо ёрии интеграл ёфтан мумкин аст?
3. Раванди ҳосил кардани формулаи ёфтани қори қувваи тағйирёбандаро нақл кунед.
4. Дар бораи қонуни Гук маълумот диҳед.

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

74. Суръати ҳаракат (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $s(t) = 2t$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм дар муддати дақиқаи сеюми ҳаракат тай мекунад, ёбед.

75. Суръати ҳаракат (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $s(t) = 3t^2 + t + 1$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм дар 4 сонияи аввал тай мекунад, ёбед.

76. Ҷисм амудӣ бо суръати аввалаи s_0 ба боло партофта шудааст. Баландии калонтарини болобароии ҷисмро ёбед.

77. Қувваи 60 Н кифоя аст, ки фанар (пружина) ба 2 см ёзонида шавад. Дарозии аввалаи фанар 14 см аст. Барои фанарро то 20 см ёзонидан чӣ қадар корро иҷро кардан лозим аст?

78. Агар қувваи бузургиаш 2 Н фанарро ба 1 см фишурад, барои 4 см фишурдани фанар кадом корро сарф кардан даркор аст?

79. Дар зери таъсири қувваи $1,5 \cdot 10^4$ Н рессор 1 см қатъ мешавад. Барои деформатсияи ба 3 см баробари рессор чӣ қадар кор зарур аст?

Машиқҳо барои такрор

80. Қимати ифодаи $0,2x^2 - 2,4$ -ро ҳангоми $x = \sqrt{10 - 3\sqrt{11}} + \sqrt{10 + 3\sqrt{11}}$ будан ҳисоб кунед.

81. Сода кунед:

$$\frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a^{0,5}} : \left[\frac{a^{0,5} + b^{0,5}}{a^{0,5}} - \frac{b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} \right].$$

82. Ҳисоб кунед:

$$\text{а) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx.$$

83. Суммаи шаш узви аввалии прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар $b_1 = 32$ ва $q = -0,5$ бошад.

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

1⁰. Доир ба пайдоиши истилоҳот ва ишоратҳо. Рамзи интеграл $\int$ -ро математики олмонӣ *Готфрид Лейбнитс* (1646–1716), ки дар қатори *Исаак Нютон* (1643–1727) бунёдгари ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралӣ ҳисоб мешавад, соли 1675 дохил кардааст. Ин рамз тағйири ҳарфи латинии *S* (ҳарфи аввали калимаи *Summa* – ҳосили ҷамъ) мебошад. Худи калимаи *интегралро* *Якоб Бернули* (1655–1705) соли 1690 пешниҳод карда буд. Шояд аз калимаи латинии *Integro*, ки маънояш барқарор кардан аст, гирифта шуда бошад, чунки амали интегралгирӣ функсияро, ки дар натиҷаи ҳосилагирии функсияи зеринтегралӣ ҳосил мешавад, «барқарор мекунад». Истилоҳи *ҳисоби интегралӣ* (*Calculus integralus*), ки соли 1696 *Иоханн Бернулли* (1667–1748) дохил кардааст, шохаи нави математика ҳисоб шуда, асосан дар ин ҷо тарзҳои ёфтани функсияҳои ибтидоӣ муоина мешуданд. Ҳисоби интегралӣ аз муоинаи масъалаҳои зиёди табиатшиносӣ ва математикӣ пайдо шудааст. Муҳимтарини ин гуна масъалаҳо – масъалаи физикии ёфтани масофае, ки ҷисми суръаташ тағйирёбанда дар муҳлати муайян тай мекунад ва масъалаи ёфтани масоҳату ҳаҷми фигураҳои геометрӣ, ки масъалаи хеле қадима аст, мебошанд.

Аз соли 1797 сар карда, истилоҳи *функсияи ибтидоӣ* ба ҷойи истилоҳи «функсияи сода», ки онро олими франсавӣ *Жозеф Лагранж* (1736–1813) дохил карда буд, пайдо шуд. Калимаи латинии *Primitivus* чун ибтидоӣ тарҷума мешавад: $F(x) = \int f(x) dx$ барои функсияи $f(x)$ ибтидоӣ мебошад, агар вай аз $F(x)$ бо воситаи ҳосилагирӣ ҳосил шавад.

Дар замони мо маҷмӯи тамоми функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ -ро *интегралӣ номуайян* низ меноманд. Ин мафҳумро Лейбнитс дохил кардааст. $\int_a^b f(x) dx$ -ро *интегралӣ муайян* мегӯянд. Онро соли 1819 Ж. *Фурйе* (1768–1830) дохил карда буд.

2⁰. Аз таърихи ҳисоби интегралӣ. Бисёр ғояҳои ҳисоби интегралиро риёзидонҳои Юнони қадим ҳангоми ҳалли масъалаҳо оид ба ёфтани *квадратура* (масоҳат)-ҳои фигураҳои ҳамвор, инчунин ёфтани *кубатура* (ҳаҷм)-ҳои ҷисмҳо пешгӯӣ карда буданд. Дар ин қатор пеш аз ҳама бояд *Евдокс* (408–355-и пеш аз милод) ва *Архимед* (287–212-и пеш аз милод)-ро номбар кард.

Асри XVII асри рушду қамол ёфтани ҳисоби интегралӣ ба ҳисоб меравад. Дар ин давра вай ба шоҳаи мустаҳкамҳои илми математика мубаддал мегардад. Ҳамчун намуна чанд кашфиёти ин давраро меорем. *Пйер Ферма* (1601–1665) соли 1629 масъалаи ёфтани квадратураи хатти қачи $y = x^n$ -ро, ки дар ин ҷо n адади бутуни дилхоҳ аст, ҳал кард. Инро истифода бурда, ӯ ҳалли якҷанд масъаларо оид ба ёфтани маркази вазнинӣ пешниҳод намуд. *Иохан Кеплер* (1571–1630) барои ҳосил кардани қонунҳои ҳаракати сайёраҳо ғояи интегралгирии тақрибиро истифода бурд. *Исаак Барроу* (1630–1677), ки устои Нютон буд, алоқаи байни интегралгирӣ ва

хосилагириро хеле хуб дарк карда буд. Теоремаи дар банди 5 исбот кардаамон ба ӯ мансуб аст.

Назарияи соф илмӣ ҳисоби интегралро Нютон ва Лейбнитс (новобаста ба ҳамдигар) пешниҳод кардаанд. Онҳо ба ғояҳои дар ҳалли масъалаҳои хусусӣ истифодашуда така карда, назарияи умумиро сохта, формулаеро кашф кардаанд, ки ҳоло номи онҳоро дорад. Вале масъалаи ёфтани функсияҳои ибтидоӣ барои бисёр функсияҳо дар пеш буд.

Дар асри оянда методҳои анализи математикӣ боз ҳам инкишоф ёфтанд. Дар ин кор пеш аз ҳама *Леонард Эйлер* (1707–1783) ва *И. Бернулли* саҳмгузоранд. Эйлер тадқиқи системавии интегралгирии функсияҳои элементариро ба итмом расонид.

Дар инкишофи ҳисоби интегралӣ олимони рус *М.В.Остроградский* (1801–1862), *В.Я. Буняковский* (1804–1889), *П.Л. Чебишев* (1821–1894) ғаёлона иштирок кардаанд. Масалан, Чебишев нишон дод, ки интегралҳои функсияҳои элементарӣ метавонанд функсияҳои элементарӣ набошанд. Ин натиҷаи барҷастаи илмӣ ба ҳисоб меравад. Танҳо дар асри XIX баёни қатъии назарияи интеграл бо кӯшиши олими олмонӣ *Бернхард Риман* (1826–1866) ва олими фаронсавӣ *Гастон Дарбу* (1842–1917) ба вуҷуд омад. Дар ибтидои асри XX аз тарафи риёзидонҳои фаронсавӣ *Анри Лебег* (1875–1941) ва *Арно Данжуа* (1884–1974), риёзидони рус *Александр Хинчин* (1894–1959) тақмилҳои гуногуни мафҳуми интеграл пешниҳод карда шудаанд.

МАШҚҲОИ ИЛОВАҒӢ ДОИР БА БОБИ 1

Ба параграфи 1.

84. Магар барои функсияи $f(x)$ функсияи $F(x)$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ функсияи ибтидоӣ аст:

а) $f(x) = 4x - 2$, $F(x) = 2x^2 - 2x + 5$;

б) $f(x) = -x^4 + 3$, $F(x) = -\frac{x^5}{4} + 3x + 2$;

в) $f(x) = -\cos \frac{x}{4} + 2$, $F(x) = -4 \sin \frac{x}{4} + 2x + 1$;

г) $f(x) = \sin(2x + 1)$, $F(x) = -\frac{\cos(2x + 1)}{2} + 10$?

85. Оё дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ шуда метавонад:

а) $F(x) = x^3 - 2x$, $f(x) = 3x^2 - 2$;

б) $F(x) = \frac{1}{x^4} - \cos x$, $f(x) = -\frac{1}{x^5} - \sin x$;

в) $F(x) = x^4 + 1$, $f(x) = -\frac{x^5}{5} + x$;

г) $F(x) = 2x + \sin x$, $f(x) = 2 + \cos x$?

86. Барои функсия намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $f(x) = kx + b$ (k ва b доимӣҳо); б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x) = x^n$ (n -адади бутун, $n \neq -1$); г) $f(x) = \sin x$.

87. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$ -ро ёбед, ки он дар нуктаи додашуда қимати маълумро мегирад:

а) $f(x) = \sqrt{x} + x$, $F(4) = 10$; б) $f(x) = \cos x$, $F(\pi) = \pi$;

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{x^3}, F(\sqrt{2}) = 0; \quad \text{г) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}, F(4) = 12.$$

88. Барои функсияи $f(x)$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

$$\text{а) } f(x) = \cos 2x - \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } f(x) = (2-3x)^4 - \frac{1}{(4x-2)^3}; \quad \text{г) } f(x) = x - 8\sin 2x.$$

89. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуктаи M мегузарад:

$$\text{а) } f(x) = (4-2x)^3, \quad M(3; 6);$$

$$\text{б) } f(x) = \cos 2x, \quad M\left(\frac{\pi}{4}; -4\right);$$

$$\text{в) } f(x) = (3x-4)^{\frac{4}{5}}, \quad M(1; 3);$$

$$\text{г) } f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x-1}}, \quad M(5; 2).$$

Ба параграфи 2.

90. Ҳисоб кунед:

$$\text{а) } \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+4)^2}; \quad \text{б) } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad \text{в) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x dx; \quad \text{г) } \int_0^4 x^3 dx.$$

91. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 6x dx; \quad \text{б) } \int_{-3}^3 (x^5 - x) dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) dx; \quad \text{г) } \int_0^1 (3x-1)^{\frac{3}{5}} dx.$$

92. Трапетсияи каҷхаттаи бо хатҳои додашуда муҳдудро тасвир кунед ва масоҳати онро ёбед:

$$\text{а) } y = 5 - 3x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = -2;$$

$$\text{б) } y = (x-1)^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$$

$$\text{в) } y = -x^3, \quad y = 0, \quad x = -3;$$

$$\text{г) } y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

93. Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ёбед:

$$\text{а) } y = \sin x, \quad y = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } y = 2\sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4, \quad x = 9;$$

$$\text{в) } y = x^2, \quad y = 4x; \quad \text{г) } y = 8 - x^2, \quad y = 4.$$

МАСЪАЛАҲОИ ТЕСТӢ ДОИР БА БОБИ 1

Ба паррафи 1.

1. Барои функсияи $f(x) = 2x - 3$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

$$\text{А) } F(x) = 2x^2 - 3x + C; \quad \text{Б) } F(x) = x^2 - 3x + C;$$

$$\text{С) } F(x) = 2x - 3x^2 + C; \quad \text{Д) } F(x) = x^2 + C.$$

2. Барои функсияи $f(x) = 2 \cos x$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

$$\text{А) } F(x) = 2 \sin x + C; \quad \text{Б) } F(x) = -2 \sin x + C;$$

$$\text{С) } F(x) = 4 \sin x + C; \quad \text{Д) } F(x) = \sin x + C.$$

3. Барои функсияи $f(x) = x^5$ намуди умумии функсияи ибтидоӣ ёфта шавад:

A) $F(x) = 6x^6 + C$; B) $F(x) = \frac{1}{5}x^6 + C$;

C) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$; D) $F(x) = \frac{5}{6}x^6 + C$.

4. Намуди умумии функцияи ибтидоии функцияи $f(x) = \frac{3}{x^4}$ ёфта шавад:

A) $F(x) = -\frac{1}{x^3} + C$; B) $F(x) = \frac{2}{x^3} + C$;

C) $F(x) = \frac{4}{x^5} + C$; D) $F(x) = \frac{1}{x^3} + C$.

5. Намуди умумии функцияи ибтидоии функцияи $f(x) = -\sin 2x$ -ро ёбед:

A) $F(x) = 2 \cos 2x + C$; B) $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$;

C) $F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + C$; D) $F(x) = -\cos 2x + C$.

6. Барои функцияи $f(x) = -4x + 2$ намуди умумии функцияи ибтидоиро ёбед:

A) $F(x) = -2x^2 + 2x + C$; B) $F(x) = 4x^2 + C$;

C) $F(x) = 2x^2 + x + C$; D) $F(x) = -2x^2 + C$.

7. Барои функцияи $f(x) = (2x+1)^3$ намуди умумии функцияи ибтидоӣ ёфта шавад:

A) $F(x) = \frac{1}{16}(2x+1)^4 + C$; B) $F(x) = \frac{1}{4}(2x+1)^4 + C$;

C) $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$; D) $F(x) = \frac{1}{6}(2x+1)^4 + C$.

8. Барои функцияи $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ намуди умумии функцияи ибтидоиро ёбед:

A) $F(x) = 2ctgx + C$; B) $F(x) = -2tgx + C$;

C) $F(x) = \frac{1}{2}tgx + C$; D) $F(x) = 2tgx + C$.

9. Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи

$$f(x) = \frac{4}{\cos^2(1-2x)} \text{ -ро ёбед:}$$

A) $F(x) = 2ctg(1-2x) + C$; B) $F(x) = -\frac{1}{2}tg(1-2x) + C$;

C) $F(x) = 2tg(1-2x) + C$; D) $F(x) = -2tg(1-2x) + C$.

10. Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи

$$f(x) = \frac{9}{\sin^2(2-3x)} \text{ -ро ёбед:}$$

A) $F(x) = 3ctg(2-3x) + C$; B) $F(x) = -3ctg(2-3x) + C$;

C) $F(x) = 6ctg(2-3x) + C$; D) $F(x) = 9ctg(2-3x) + C$.

11. Барои функсияи $f(x) = \frac{3}{x^4} + 1$ функсияи ибтидоии

$F(x)$ -ро ёбед, ки он шарти $F(1) = 8$ -ро қаноат мекунонад:

A) $F(x) = -\frac{1}{x^3} + x + 8$; B) $F(x) = \frac{1}{x^3} + 8$;

C) $F(x) = \frac{4}{x^5} + x + 6$; D) $F(x) = \frac{1}{x^3} + x + 8$.

12. Барои функсияи $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x}$ функсияи ибтидоии

$F(x)$ -ро ёбед, ки он шарти $F(\frac{\pi}{4}) = -4$ -ро қаноат мекунонад:

A) $F(x) = -2ctgx + 2$; B) $F(x) = -2ctgx - 2$;

C) $F(x) = \frac{1}{2}ctgx + 2$; D) $F(x) = 2tgx - 2$.

13. Барои функсияи $f(x) = (1 - 2x)^3$ функсияи ибтидоии $F(x)$ -ро ёбед, ки он шарти $F(-0,5) = -1$ -ро қонеъ мекунонад:

- A) $F(x) = \frac{1}{12}(1 - 2x)^4$; B) $F(x) = \frac{1}{4}(1 - 2x)^4 + 1$;
C) $F(x) = \frac{1}{8}(1 - 2x)^4 + 1$; D) $F(x) = -\frac{1}{8}(1 - 2x)^4 + 1$.

14. Барои функсияи $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ функсияи ибтидоии $F(x)$ -ро ёбед, ки он шарти $F(-\pi) = -3$ -ро қаноат мекунонад:

- A) $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} - 1$; B) $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + 1$;
C) $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} - 5$; D) $F(x) = \sin \frac{x}{2} + 1$.

15. Барои функсияи $f(x) = x^2 - 4x$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(3; 5)$ мегузарад:

- A) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$; B) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 9$;
C) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 14$; D) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8$.

16. Барои функсияи $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(0; 3)$ мегузарад:

- A) $F(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 2$ B) $F(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 5$;
C) $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} - 5$; D) $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + 5$.

17. Барои функсияи $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$ функсияи ибтидоиеро

ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ мегузарад:

- A) $F(x) = 2\operatorname{ctgx} + 3$; B) $F(x) = -3\operatorname{tgx} - 3$;
C) $F(x) = -3\operatorname{tgx} + 3$; D) $F(x) = 3\operatorname{tgx} - 3$.

18. Барои функсияи $f(x) = -2x - 3$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M(3; 5)$ мегузарад:

- A) $F(x) = -x^2 - 3x + 23$; B) $F(x) = -x^2 + 13$;
C) $F(x) = -x^2 - 3x + 19$; D) $F(x) = -x^2 - 3x$.

19. Барои функсияи $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M(-\frac{1}{3}; 4)$ мегузарад:

- A) $F(x) = -\frac{1}{x} - 1$; B) $F(x) = \frac{1}{x} - 1$;
C) $F(x) = -\frac{1}{x} + 1$; D) $F(x) = -\frac{2}{x} + 1$.

20. Барои функсияи $f(x) = -\cos\frac{x}{3}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M(\frac{\pi}{2}; 0,5)$ мегузарад:

- A) $F(x) = 3\sin\frac{x}{3} - 2$; B) $F(x) = -3\sin\frac{x}{3} + 2$;
C) $F(x) = -\sin\frac{x}{2} + 2$; D) $F(x) = -3\sin\frac{x}{3} + 1$.

21. Барои функсияи $f(x) = \sqrt{1-2x} + \frac{1}{x^2}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M(-4; 0,25)$ мегузарад:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad F(x) &= \frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} - \frac{1}{x} + 9; & \text{B)} \quad F(x) &= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} + \frac{1}{x} + 7; \\ \text{C)} \quad F(x) &= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} - \frac{1}{x} - 9; & \text{D)} \quad F(x) &= \frac{1}{4}\sqrt{(1-2x)^3} - \frac{2}{x} + 6. \end{aligned}$$

22. Барои функсияи $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{3x-2}}$ функсияи

ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(2; -\frac{1}{3})$ мегузарад:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad F(x) &= \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}\sqrt{3x-2} + 1; & \text{B)} \quad F(x) &= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{3x-2} + 1; & \text{C)} \\ F(x) &= \frac{x^4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3x-2} - 1; & \text{D)} \quad F(x) &= \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}\sqrt{3x-2} - 1,5. \end{aligned}$$

23. Барои функсияи $f(x) = \frac{4}{x^3} - 8x^{-2}$ функсияи

ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(2; 5,5)$ мегузарад:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad F(x) &= \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x} + 1; & \text{B)} \quad F(x) &= -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x} + 2; \\ \text{C)} \quad F(x) &= \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x} + 2; & \text{D)} \quad F(x) &= -\frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + 2. \end{aligned}$$

24. Мувофиқати байни функсияи $f(x)$ ва функсияи ибтидоии $F(x)$ -и сугунҳои чап ва ростро муайян кунед:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad f(x) &= 8 - 3x^2, & 1. \quad F(x) &= -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + C; \\ \text{B)} \quad f(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2, & 2. \quad F(x) &= 8x - x^3 + C; \\ \text{C)} \quad f(x) &= (1-2x)^5, & 3. \quad F(x) &= \frac{1}{4}(x^2 - x^3) + C; \\ \text{D)} \quad f(x) &= (2x-3)^4, & 4. \quad F(x) &= \frac{1}{8}(2x-3)^4 + C; \\ & & 5. \quad F(x) &= \frac{1}{10}(2x-3)^5 + C. \end{aligned}$$

25. Мувофиқати байни функсияи $f(x)$ ва функсияи ибтидоии $F(x)$ -и сутунҳои чап ва ростро муайян кунед:

- | | |
|---|---|
| A) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right),$ | 1. $F(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) + C;$ |
| B) $f(x) = \cos(2x - 1),$ | 2. $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - 1) + C;$ |
| C) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 3\right),$ | 3. $F(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) + C;$ |
| D) $f(x) = \sin(2x - 1),$ | 4. $F(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - 1) + C;$ |
| | 5. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x - 1) + C.$ |

Ба параграфи 2.

26. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$$

- A) $\frac{7}{3};$ B) $-\frac{8}{3};$ C) $\frac{5}{9};$ D) $\frac{3}{7}.$

27. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^3 (3x^2 + x - 1)dx$$

- A) $\frac{7}{3};$ B) $-\frac{8}{3};$ C) $27\frac{1}{2};$ D) $28\frac{1}{2}.$

28. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - 3x - 2)dx$$

- A) $\frac{7}{3};$ B) $-\frac{8}{3};$ C) $\frac{5}{9};$ D) $\frac{3}{7}.$

29. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-3}^1 (9x^2 - 2x) dx$$

A) 88; B) 91; C) 92; D) 64 .

30. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_1^2 (x - 2)^2 dx$$

A) $\frac{7}{3}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{5}{9}$; D) $\frac{1}{3}$.

31. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^4 (3x - 1)^2 dx$$

A) 148; B) 143; C) 138; D) 144 .

32. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - 2\cos x) dx$$

A) -2 ; B) -3 ; C) 3 ; D) 2 .

33. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

A) 1; B) -1 ; C) 2; D) $\frac{3}{4}$.

34. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx$$

A) π ; B) $\pi + 2$; C) 2π ; D) 1 .

35. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_1^3 \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} dx$$

A) 5; B) 7; C) 8; D) 10 .

36. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-3}^2 (x - 1) dx$$

A) $-6,5$; B) $4,5$; C) $-7,5$; D) $3,5$.

37. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^4 (2x + 1) dx$$

A) 16; B) 20; C) 21; D) 18 .

38. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_2^5 \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} dx$$

A) $16 \frac{1}{3}$; B) $\frac{32}{3}$; C) $16 \frac{1}{2}$; D) $\frac{3}{7}$.

39. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_2^4 |x - 3| dx$$

A) 1; B) 2; C) 3; D) $4,5$.

40. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^3 |2x - 3| dx$$

A) $3,8$; B) $4,8$; C) $\frac{5}{9}$; D) $4,5$.

41. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^1 (2|x| + 1) dx$$

A) 2; B) 3; C) 4; D) 4,5 .

42. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^2 (3 - 2|x - 1|) dx$$

A) 3,8; B) 4; C) 3; D) 4,5 .

43. Интегрални зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^1 \left(\left| x - \frac{1}{2} \right| + 2x \right) dx$$

A) $3\frac{1}{3}$; B) 4,8; C) $1\frac{1}{4}$; D) $4\frac{1}{4}$.

44. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = 2$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 2; B) 3; C) $2\frac{1}{3}$; D) $4\frac{2}{3}$.

45. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = 3$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 7; B) 9; C) 8; D) 6 .

46. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = 3$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 2; B) 3; C) 8; D) 6 .

47. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 2; B) 3; C) $\frac{1}{2}$; D) 1 .

48. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 4x - x^2$ ва $x + y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 22; B) $20\frac{5}{6}$; C) $12\frac{1}{3}$; D) 11.

49. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 6 - x^2$ ва $y = 2x + 3$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) $10\frac{2}{3}$; B) $3\frac{1}{10}$; C) $2\frac{1}{3}$; D) $6\frac{2}{3}$.

50. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 2; B) $\frac{3}{2}$; C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; D) $4\sqrt{2}$.

51. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sqrt{x+1}$, $x = 1$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 2; B) 3; C) $2\frac{1}{3}$; D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

52. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ ва $x = \pi$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 1; B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; C) $\frac{1}{3}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

53. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) 2π ; B) $3\pi - 1$; C) $\frac{\pi}{3} - 1$; D) $\frac{\pi}{3}$.

54. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

A) $\pi + 1$; B) $\frac{\pi}{2} + 1$; C) $\frac{\pi}{3}$; D) π .

55. Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sin x - \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$$A) \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}; \quad B) \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}; \quad C) \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}; \quad D) \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

56. Мувофиқати байни интегралҳо ва қиматҳои онҳо муайян карда шавад:

$$A) \int_{-1}^2 (1 - 2x) dx, \quad 1. \frac{2}{3};$$

$$B) \int_1^2 (3 - x)^2 dx, \quad 2. 0;$$

$$C) \int_0^2 \frac{dx}{(x - 3)^2}, \quad 3. \frac{1}{3};$$

$$D) \int_{-4}^0 \sqrt{1 - 2x} dx, \quad 4. \frac{7}{3};$$

$$5. \frac{26}{3}.$$

57. Мувофиқати байни интегралҳо ва қиматҳои онҳо муайян карда шавад:

$$A) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2 \sin x) dx, \quad 1. -1;$$

$$B) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x} dx, \quad 2. \frac{\pi + 2}{2};$$

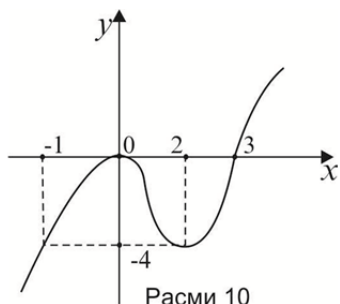
$$C) \int_0^{\pi} \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx, \quad 3. 3;$$

$$D) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx, \quad 4. \frac{\pi}{2};$$

$$5. \frac{\pi}{3}.$$

ҶАВОБҲО

2. а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не; д) не; е) ҳа. 3. Масалан: а) $1,5x+1$; б) x^2+2 ; в) $-\cos x$; г) $\sin x$; д) $-\frac{x^2}{2}+2$; е) $-\sin x$; ж) $-3x+4$; з) $\cos x$; и) $\frac{x^3}{3}$; к) $\frac{x^6}{6}$; л) 1; м) $-\frac{x^4}{4}+2$. 4. а) $1,5x$;



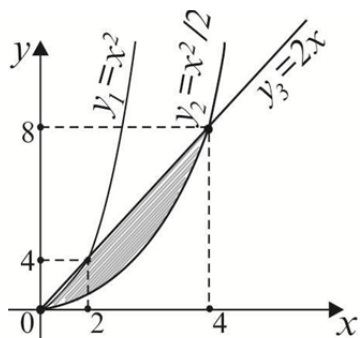
б) $\sin x$; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $\operatorname{tg} x$; е) $-2\cos x$; ж) $-\operatorname{ctg} x$; з) $-\frac{1}{4}\cos 4x$;
и) $-\frac{\sin(2x+3)}{2}$. 5. Масалан: а) $2x^2+1$
ва $2x^2+3$; б) $-\cos x + x + 1$ ва $-\cos x + x + 2$; в) $\frac{x^4}{4} + 8$ ва $\frac{x^4}{4} + 11$;

г) $2x - \sin x + 5$ ва $2x - \sin x + 2$. 6. а) $g(x)$; б) $f(x)$; в) $h(x)$. 7. 1. 8. 4. 9. 1. 10. Расми 10. 11. 1,5. 12. а) не; б) ҳа; в) ҳа; 14. Ҳа, масалан, $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ даврӣ буда, функцияи ибтидоияш $F(x) = ax + b$ ғайридаврӣ мебошад. 15. Исбот.

Агар $f(x) = -f(-x)$ ё $F'(x) = -F'(-x) = (F(-x))'$ бошад, пас $F(x) = F(-x) + C$. Аз ин ҷо $F(0) = F(-0) + C$ ё $C = 0$. Пас $F(-x) = F(x)$. 16. $x-y$. 17. $(-\infty; 1] \cup [5; \infty)$. 18. 585. 19. -1. 20.

$x^2 - x - 6 = 0$. **21.** а) $2x + C$; б) $\sin x + C$, в) $\frac{x^6}{6} + C$, г) $-\frac{1}{3x^3} + C$, д) $\cos x + C$, е) $-4x + C$. **22.** а) $-\frac{1}{2x^2} + 10,5$; б) $-\operatorname{ctg} x - 1$; в) $\frac{x^7 + 22}{7}$; г) $-(\cos x + 4)$. **23.** а) $\frac{x^4}{4} - 3$; б) $-\cos x + 4$; в) $\operatorname{tg} x - 1$; г) $-2x + 11$; д) $-\frac{1}{2x^2} + 5$; е) $-\sin x + 1$. **24.** а) $x(t) = -\frac{t^3}{6} - t + \frac{22}{3}$; б) $x(t) = -\cos t - 1$. **25.** -1 . **26.** 2 . **27.** $(4; 1)$. **28.** $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **29.** а) $2x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$; б) $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3x^3} - \cos x + C$; в) $\operatorname{tg} x - \cos x + C$; г) $-\frac{1}{x} + 4\cos x + C$. **30.** а) $\frac{(3x-1)^7}{21} + C$; б) $-\frac{(2-5x)^4}{20} + C$; в) $-\frac{\cos(9x+1)}{9} + C$; г) $\frac{1}{4}\sin(4x-9) + C$. **31.** а) $\frac{2}{7(2-7x)^2} + C$; б) $\frac{2}{9(4-3x)^3} + C$; в) $\frac{3}{4}\operatorname{tg}(4x-1) + C$; г) $\frac{1}{2x^4} - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x-1)$. **32.** а) $x^2 - \frac{1}{2x^2} - \frac{23}{8}$; б) $\frac{x^5}{5} - x + 5,6$; в) $-\frac{3}{2}x^2 + x + 7$; г) $-\frac{1}{x} - \frac{4}{3}x^6 + 2x + 7\frac{1}{3}$. **33.** а) $x + \frac{1}{6}\cos 6x - 2\sin(\frac{\pi}{3} - x) + C$; б) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x - \frac{5\sqrt{(3-x)^4}}{4} - \frac{1}{2}x^4 + C$; в) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}(4x+1) + 4\sin(2-x) + \frac{3}{2}x^2 + C$; г) $\frac{1}{4(4-2x)^2} + \frac{4}{7}\sqrt{7x-1} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$. **34.** $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + t$. **35.** $x(t) = \frac{2}{3}t^4 + \frac{5}{2}t^2 + 8t + 16$. **36.** а) $x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 4t - 9\frac{1}{6}$; б) $x(t) = -\frac{4}{3}\sin t + \frac{5}{3}t + 2 - \frac{5}{3}\pi$. **37.** $y_{\min} = y(2) = -44$,

$y_{\max} = y(-1) = 37$. **38.** (4;1) ва (1; 4). **39.** 90° . **40.** Барои $c > 1$, қимати хурдтарини бутуни c ба 2 баробар аст. **41.** 15 км ва 12



Расми 11.

км. **42.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) 2; г)

1. **43.** а) $4\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$; в)

$\frac{\pi}{2} + 2$; г) $85\frac{1}{3}$. **44.** а) $2\frac{2}{3}$; б) 2,5;

в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{4}$. **45.**

$-\frac{1}{2}\text{ctg}(2x+1) + \frac{1}{9}\sqrt{(6x-5)^3} + \frac{2}{5}x^5 + C$. **46.** 4. **47.** (-3; -1) ва (3; 1).

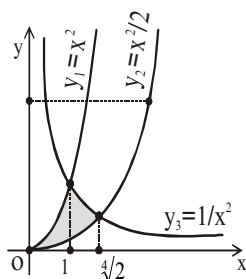
48. 45° . **49.** Дар $(-\infty; -0,5)$ ва $(0,5; +\infty)$ камшаванда буда, дар $(-0,5; 0,5)$ афзуншаванда аст. $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$, $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

50. а) $4\frac{1}{2}$; б) $\frac{4}{3}$; в) 9; г) 5. **51.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 36; в) $10\frac{2}{3}$; г) $4\sqrt{3}$. **52.**

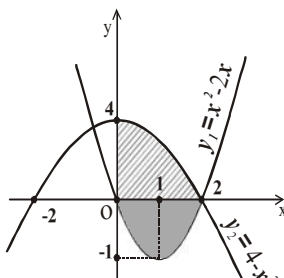
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{11}{20}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$. **53.** а) 4. Нишондод: дар як

системаи координатӣ графики функсияҳои $y_1 = x^2$, $y_2 = \frac{x^2}{2}$ ва $y_3 = 2x$ -ро кашида мебинем, ки масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои рах – рах ҷудо шудааст, ёфтан зарур аст (ниг. ба расми 11).

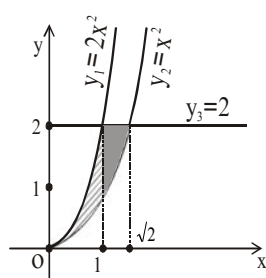
б) $\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ (ниг. ба расми 12); в) $6\frac{2}{3}$ (ниг. ба расми 13);



Расми 12.



Расми 13.



Расми 14.

г) $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}$ (ниг. ба расми 14). **54.** 26. **55.** $\sqrt{a}$. **56.**

$\frac{5\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **57.** 0. **58.** $\frac{1}{4} \sin(4x-5) + C$. **59.** а) 4; б) 1; в)

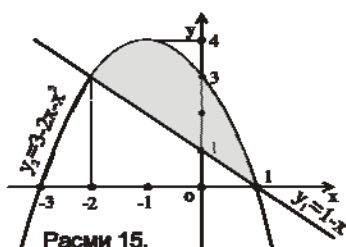
$9\frac{1}{3}$; г) $\sqrt{3}-1$. **60.** а) $\frac{16}{3}$; б) 30; в) $3\sqrt[3]{2}$; г) $\frac{1}{6}$. **61.** а) $\frac{\pi}{2}$; б)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **62.** а) 76; б) 14; в) $-\frac{2}{15}$; г) $\frac{9}{8}$. **63.** а) -18;

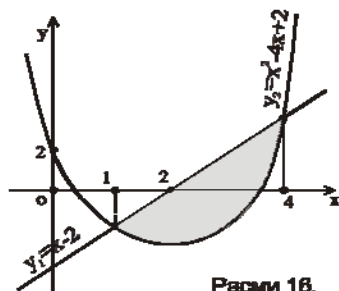
б) 290; в) $\sqrt{5}-1$; г) $2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$. **64.** а) 9; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 9.

65. а) $2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$; б) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) 4,5. **66.** а) 4,5 (ниг. ба

расми 15). б) $1\frac{1}{3}$; в) 4,5; г) 4,5 (ниг. ба расми 16).

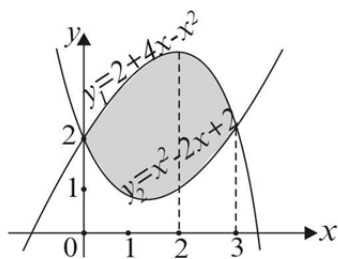


Расми 15.

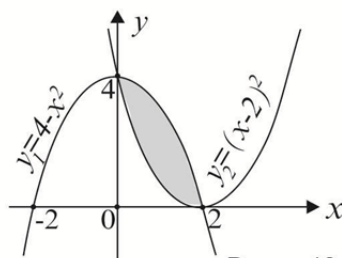


Расми 16.

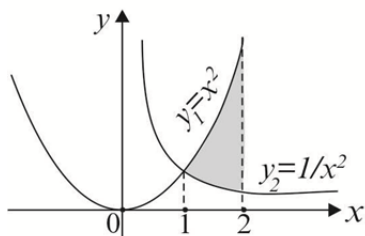
67. а) 9 (ниг. ба расми 17); б) $2\frac{2}{3}$ (ниг. ба расми 18); в) $1\frac{5}{6}$ (ниг. ба расми 19); г) $\frac{1}{12}$ (ниг. ба расми 20).



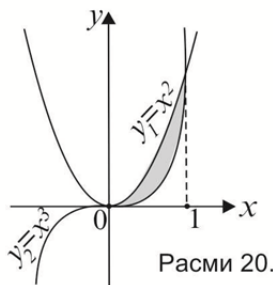
Расми 17.



Расми 18.



Расми 19.



Расми 20.

68. $2\frac{1}{4}$. 69. $1\frac{1}{3}$. 70. Нишондод: $n^3 + 3n^2 + 5n = n^3 - n + (3n^2 + 6n) = (n-1)n(n+1) + 3n(n+2)$. Дар ифодаи охирин ҳар дуи ҷамъшавандаҳо ба 3 тақсим мешаванд (барои чӣ?), пас суммашон низ ба 3 тақсим мешавад. 71. а) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x+1)^4} + \sqrt{2x-1} + C$; б) $\frac{5}{12}(3x+2)^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$. 72. $[6; 11]$. 73. $\left(\frac{1-\sqrt{82}}{3}; -2\right) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{82}}{3}\right)$. 74. 5м. 75. 76м. 76. $\frac{g^2}{2g}$ ($g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{сония}^2}$). 77. 5,4 ҷ. 78. 0,16 ҷ. 79. 675 ҷ. 80. 2.

81. $a-b$. 82. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{2}$. 83. 21. 84. а) ҳа; б) не; в) ҳа; г) ҳа.
85. а) ҳа; б) не; в) не; г) ҳа. 86. а) $\frac{kx^2}{2} + bx + C$; б) $tgx + C$; в) $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; г) $-\cos x + C$. 87. а) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{10}{3}$; б) $\sin x + \pi$; в) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4}$; г) $2\sqrt{x-3} + 10$. 88. а) $\frac{\sin 2x}{2} + 2ctg \frac{x}{2} + C$; б) $-\frac{2}{x^2} - \sqrt{x} + C$; в) $-\frac{1}{15}(2-3x)^5 + \frac{1}{8(4x-2)^2} + C$; г) $\frac{x^2}{2} + 4\cos 2x + C$. 89. а) $-\frac{1}{8}(4-2x)^4 + 8$; б) $\frac{\sin 2x}{2} - 4,5$; в) $\frac{5}{27}(3x-4)^{\frac{9}{5}} + \frac{86}{27}$; г) $-\sqrt{2x-1} + 5$. 90. а) $\frac{1}{3}$; б) 2; в) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 64. 91. а) 0; б) 0; в) 1; г) $\frac{5}{24}(\sqrt[5]{256}-1)$. 92. а) 16; б) $\frac{1}{3}$; в) 20,25; г) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 93. а) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; б) $25\frac{1}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) $10\frac{2}{3}$.

Масъалаҳои тестӣ

1. B. 2. A. 3. C. 4. A. 5. C. 6. A. 7. C. 8. D. 9. D. 10. A. 11. A. 12. B. 13. D. 14. A. 15. C. 16. B. 17. D. 18. A. 19. C. 20. B. 21. C. 22. A. 23. B. 24. A-2; B-3; C-1; D-5. 25. A-3; B-2; C-1; D-5. 26. A. 27. D. 28. B. 29. C. 30. D. 31. A. 32. C. 33. A. 34. B. 35. D. 36. C. 37. B. 38. C. 39. A. 40. D. 41. C. 42. B. 43. C. 44. D. 45. B. 46. D. 47. C. 48. B. 49. A. 50. C. 51. D. 52. B. 53. C. 54. A. 55. D. 56. A-2; B-4; C-1; D-5. 57. A-1; B-3; C-4; D-2.

**ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА
ЛОГАРИФМӢ. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ
НИШОНДИҲАНДАГИЮ ЛОГАРИФМӢ**

**§3. ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ.
ГРАФИК ВА ХОСИЯТҲОИ ОН**

**9. ТАЪРИФ ВА ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ
НИШОНДИҲАНДАГӢ**

Мо ба омӯзиши функсияе шурӯъ мекунем, ки вай дар математика ва татбиқи он дар физика, техника, иқтисодиёт, ҷомеашиносӣ ва экология нақши муҳим мебозад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки бо формулаи $y = a^x$ ифода мешавад, функсияи нишондиҳандагӣ ном дорад.**

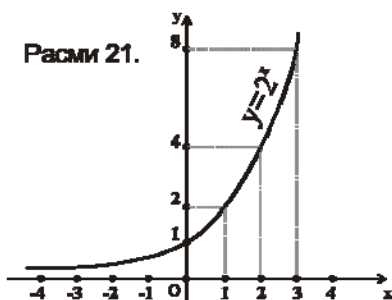
Дар ин ҷо a адади додашуда буда, $a > 0$ ном дорад. Тағйирёбандаи x қиматҳои ҳақиқӣ қабул мекунад, яъне ҳам ратсионалӣ ва ҳам ирратсионалӣ шуда метавонад. Вай *нишондиҳандаи дараҷа* ё *дараҷа* ном дорад. Тавре медонем, барои он ки ифодаи a^x барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда маъно дошта бошад, зарур аст, ки $a > 0$ шавад (Масалан, ифодаи $(-1)^{\frac{1}{2}}$ маъно надорад). Ҳангоми $a = 1$ будан қимати функсия доимӣ аст (Аниқаш, барои ҳамаи қиматҳои аргумент қимати функсия ба 1 баробар мешавад). Аз ҳамин сабаб ҳисоб карда мешавад, ки $a > 0$ ва $a \neq 1$ аст.

Барои аёнтар дарк кардани графיקи функсияи $y = a^x$, графיקи функсияҳои, масалан, $y = 2^x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ -ро месозем.

Бо мақсади ёфтани якчанд нуқтаи графики функсияи $y = 2^x$ чадвали қиматҳои онро бо қадами 1 тартиб медиҳем.

Ин нуқтаҳоро дар ҳамвории координатӣ $(x; y)$ қайд ва баъд онҳоро бо хати муназзами яклухт пайваست карда, графикро ҳосил мекунем (расми 21).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Барои сохтани графики

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ худи ҳамин чадвалро

истифода кардан мумкин аст.

Барои ин аз баробарии

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ истифода бурда

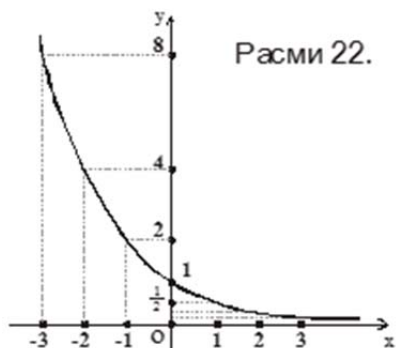
мебинем, ки қимати ин функсия дар нуқтаи $x = -3$ ба қимати $y = 2^x$ дар нуқтаи $x = 3$ баробар аст ва ҳоказо. Яъне чадвали

қиматҳои $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ чунин аст:

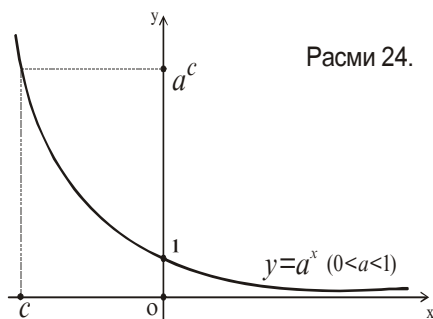
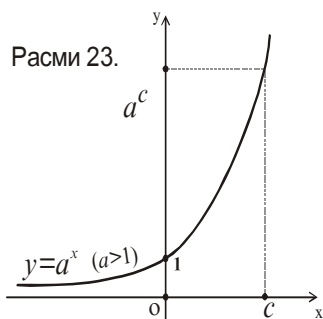
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Дар ҳамвории координатӣ ин нуқтаҳоро қайд мекунем ва

онҳоро бо хати муназзам пайваст намуда, графики $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ -ро ҳосил мекунем (расми 22).



Муоинаи дақиқи ин ду график ба хулоса меорад, ки графики функцияи $y = a^x$: а) ҳангоми $a > 1$ будан; б) ҳангоми $0 < a < 1$ будан схемавӣ намуди зеринро дорад (расмҳои 23 ва 24):

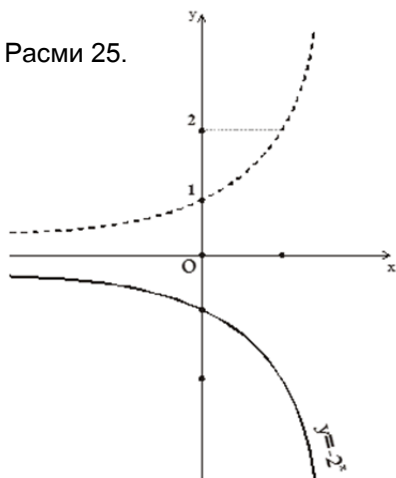


Соختани графики ду функцияро, ки ба соختани графики функцияи нишондиҳандагӣ оварда мешаванд, дида мебароем.

М и с о л и 1. Графики функцияи $y = -2^x$ -ро месозем.

Ҳ а л. Мо аллакай графики функцияи $y = 2^x$ -ро медонем. Агар нуқтаи $(a; b)$ ба он тааллуқ дошта бошад, пас $b = 2^a$ аст. Аз ин ҷо $-b = -2^a$. Аз ин баробарӣ бармеояд, ки нуқтаи $(a; -b)$ дар графики $y = -2^x$ ҷойгир аст. Баръакс, агар нуқтаи

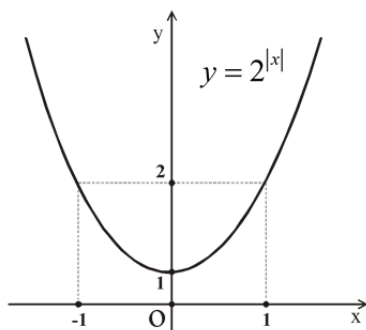
Расми 25.



$(c; d)$ дар графики $y = -2^x$ чойгир бошад, пас $d = -2^c$, яъне $-d = 2^c$. Аз ин ҷо бармеояд, ки нуқтаи $(c; -d)$ ба графики $y = 2^x$ тааллуқ дорад.

Ҳамин тариқ, барои сохтани графики функцияи $y = -2^x$ кифоя аст, ки графики $y = 2^x$ нисбат ба тири OX симметрий инъикос карда шавад (расми 25).

М и с о л и 2. Графики $y = 2^{|x|}$ -ро месозем.



Расми 26.

Ҳ а л. Агар $x \geq 0$ бошад, он гоҳ $|x| = x$ ва $y = 2^x$ аст. Барои ҳамин дар чоряки якум графики матлуб бо графики функцияи $y = 2^x$ якхела аст. Агар $x < 0$ бошад, $|x| = -x$ ва $y = 2^{|x|} = 2^{-x}$ мешавад. Яъне, дар чоряки дуюм график айнан графики функцияи $y = 2^{-x}$ аст (расми 26).

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Таърифи функцияи нишондиҳандагиро диҳед.
2. Чаро асосро мусбат ва нобаробари 1 ҳисоб мекунам?
3. Оё графики функцияи нишондиҳандагӣ тири абсиссаро

мебурад?

4. Барои сохтани графики функцияи нишондиҳандагӣ чӣ тавр рафтор мекунанд?

5. Магар графики функцияи нишондиҳандагӣ ба коэффитсиенти a вобастагӣ дорад?

6. Як функцияи нишондиҳандагӣ тартиб дода, графикашро ба таври схемавӣ созед.

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

94. Аз байни функцияҳои $y = -3x + 6$; $y = (0,2)^x$; $y = |x + 3|$; $y = (-2)^x$; $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$; $y = 1^x$, $y = -3^x$ функцияҳои нишондиҳандагиро муайян кунед.

95. Ҷадвали қиматҳои функцияи $y = 3^x$ -ро аз -3 то 3 бо қадами 1 тартиб дода, аз рӯи он графики функцияҳои $y = 3^x$ ва $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ -ро созед.

96. Дар як ҳамвории координатӣ графикҳои функцияҳои:

$$\text{а) } y = 2^x \text{ ва } y = 4^x; \quad \text{б) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ва } y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

-ро кашед.

97. Графики функцияҳои $y = 5^x$ ва $y = -5^x$ -ро дар як ҳамвории координатӣ созед.

Машиқҳо барои такрор

98. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{5x - 2x^2}$ -ро ёбед.

99. Ҳисоб кунед: а) $81^{0,25} \cdot 27^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{0,75}$; б) $\left(2^{-\frac{1}{7}}\right)^{1,4} \cdot 4^{0,1}$.

100. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед: а) $a - 4a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}$.

101. Қимати калонтарини сеузваи квадрати $-x^2 + 5x - 4$ -ро ёбед.

10. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Боз ба муоинаи графики функсияҳои $y = 2^x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

бармегардем (расми 21 ва 22). Графикҳо нишон медиҳанд, ки ин функсияҳо дар тамоми тири ададӣ муайян буда, қиматашон ҳамеша мусбат аст. Ғайр аз ин, онҳо ҳар як қимати худро танҳо як маротиба (дар як нукта) қабул мекунамд. Бо ибораи дигар,

муодилаҳои $2^x = y$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$ ҳангоми $y \leq 0$ будан ҳал

надошта, ҳангоми $y > 0$ будан танҳо якто ҳал доранд. Ҳангоми афзудани аргумент функсияи $y = 2^x$ афзуда, функсияи

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ кам мешавад.

Ин андешаҳо ба хулосае меоранд, ки $y = a^x$ - функсияи нишондиҳандагии асосаш адади дилхохи $a > 0$ ва $a \neq 1$, дорои хосиятҳои зерин аст (Исботи ин хосиятҳо аз доираи курси математикаи мактабӣ берун аст, бинобар ин онҳо оварда

намешаванд):

1⁰. Соҳаи муайянии функсия тамоми маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R = (-\infty; \infty)$ аст.

2⁰. Соҳаи қиматҳои функсия маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+ = (0; \infty)$ мебошад. Яъне, барои ҳар гуна қимати тағйирёбандаи x қимати функсия мусбат аст.

3⁰. Функсия ҳар як қимати худро расо як маротиба қабул мекунад. Аз ҳамин сабаб, вай на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст.

4⁰. Функсия қиматҳои хурдтарин ва калонтарин надорад.

5⁰. Графики функсия тири абсиссаро намебурад. Нуқтаи буриши графики функсияи нишондиҳандагӣ бо тири ордината нуқтаи $(0; 1)$ аст. Координатаҳои ин нуқта ба асоси функсияи нишондиҳандагӣ вобастагӣ надоранд, чунки дараҷаи нулии ҳар гуна адади $a > 0$ ба як баробар аст.

6⁰. Ҳангоми $a > 1$ будан функсия дар тамоми нуқтаҳои тири ададии R меафзояд (афзуншаванда аст) ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан дар R кам мешавад (камшаванда аст).

7⁰. Барои қиматҳои дилхоҳи ҳақиқии x ва y баробариҳои:

$$1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad 2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad 3) (ab)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad 5) (a^x)^y = a^{xy}$$

ҷой доранд (дар ин ҷо a ва b ададҳои мусбати нобаробари яканд).

Ин баробариҳоро *хосиятҳои асосии дараҷа* меноманд.

Э з о х. Дурустии хосиятҳои 6⁰ ва 7⁰ ҳангоми ратсионалӣ будани нишондиҳанда исбот шуда буд. Акнун ба хулоса меоем, ки ин хосиятҳо ҳангоми ирратсионалӣ будани дараҷа низ ҷой доранд.

Қайд мекунем, ки хосиятҳои 1⁰-6⁰ имкон медиҳанд, ки

графики функцияи нишондиҳандагӣ схемавӣ, бе пешакӣ тартиб додани чадвал сохта шавад. Акнун чанд мисолро дида мебароем, ки ҳалли онҳо ба хосиятҳои функция така мекунад.

М и с о л и 1. Маълум, ки нобаробарии $4^m > 4^n$ дуруст аст. m ва n -ро муқоиса мекунем.

Ҳ а л. Ифодаҳои 4^m ва 4^n -ро ҳамчун қимати функцияи нишондиҳандагии $y = 4^x$ ҳангоми $x = m$ ва $x = n$ будан ҳисоб кардан мумкин аст. Функцияи $y = 4^x$ афзуншаванда мебошад, яъне ба қимати калони функция қимати калони аргумент рост меояд. Барои ҳамин $m > n$ аст.

М и с о л и 2. Нобаробарии $a^4 < a^6$ ҳангоми $a > 0$ будан дуруст мебошад. Асоси a -ро бо як муқоиса мекунем.

Ҳ а л. Мувофиқи шарт ба қимати хурди аргументи 4 қимати хурди функцияи a^x мувофиқат мекунад. Барои ҳамин функция афзуншаванда аст. Пас $a > 1$ мебошад.

М и с о л и 3. Аломати решаи муодилаи $0,9^x = 4$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $4 > 0$ аст, пас ин муодила танҳо якто реша дорад. Функцияи $y = 0,9^x$ камшаванда аст ва ҳангоми $x = 0$ будан $y = 1$ мебошад. Вале $1 < 4$ аст, пас аломати решаи муодила манфӣ аст.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Хосиятҳои функцияи нишондиҳандагиро номбар кунед.
2. Ҳангоми ратсионалӣ будани аргумент баробариҳои 3) ва 4)-ро исбот кунед.

3. Оё функсияи нишондиҳандагӣ каниш дошта метавонад?
4. Барои чӣ графики функсияи нишондиҳандагӣ тири абсиссаро намебурад?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

102. Ададҳои x ва y - ро муқоиса кунед, агар нобаробарӣ дуруст бошад:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x < \left(\frac{4}{9}\right)^y$; б) $0,2^x > 0,2^y$; в) $\left(\frac{9}{2}\right)^x < \left(\frac{9}{2}\right)^y$.

103. Адади мусбати a -ро бо як муқоиса кунед, агар маълум бошад, ки:

а) $a^{0,2} > a^{0,5}$; б) $a^{4,3} < a^3$; в) $a^{\sqrt{5}} > a^2$; г) $a^{\sqrt{2}} < a^{1,4}$.

104. Графики функсияро схемавӣ тасвир кунед:

а) $y = 3^x$; б) $y = 0,6^x$; в) $y = 1,5^x$; г) $y = 0,9^x$.

105. Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$ б) $y = -3^x$; в) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = 6^x - 5$;

д) $y = 2^{x+1} - 2$; е) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 2$; ж) $y = |3^x - 3|$; з) $y = 7^{|x|}$.

106. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро ёбед:

а) $y = 2^{\sin x}$; б) $y = 1 + 9^{|\sin x|}$; в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$; г) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{|\cos x|} - 1$.

107. Аломати решаи муодиларо муайян кунед:

а) $2,3^x = 4,5$; б) $0,2^x = 0,3$; в) $0,7^x = 2,9$; г) $4,7^x = 0,2$.

108. Муодиларо графикӣ ҳал кунед:

а) $2^x = 4$; б) $2^x = 3 - x$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$; г) $3^x = 1 - x$.

109. Барои кадом қиматҳои x графикҳои функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳамдигарро мебуранд:

а) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2$; б) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 16$;

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{27}$; г) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $g(x) = 0,04$?

110. Барои кадом қиматҳои x графики функсияи $f(x)$ дар поёни графики функсияи $g(x)$ ҷойгир аст, агар:

а) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 16$; б) $f(x) = 0,3^x$, $g(x) = 0,027$ бошад?

111. Нобаробариро графикӣ ҳал кунед:

а) $2^x > 1 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x + 1$.

Машқҳо барои такрор

112. Қимати ифодаи ададиро ҳисоб кунед:

а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$;

в) $\sqrt[7]{\frac{1}{9}} : 243^{\frac{1}{7}} \cdot (7\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{6}}$.

113. Ифодаро сода кунед:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}; & \text{б) } \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}; \\ \text{в) } \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; & \text{г) } \frac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}. \end{array}$$

114. Кадоме аз ин ададҳо калон аст:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}} \text{ ё } 2^{-1,5}; & \text{б) } 3^{\sqrt{5}} \text{ ё } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2,25} ? \end{array}$$

115. Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$\text{а) } y = \sqrt{x}(x+2); \quad \text{б) } y = \frac{2x-1}{x}.$$

116. Муодиларо ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sin x \cos x = \frac{1}{2}; & \text{б) } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}$$

§4. МУОДИЛА, НОБАРОБАРӢ ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАӢ

11. МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАӢ

Т а ъ р и ф. Муодилае, ки дар он номаълум дар дараҷа аст, муодилаи нишондиҳандаӢ номида мешавад.

Муодилаи одитарини нишондиҳандаӢ ин муодилаи

$$a^x = b \quad (1)$$

мебошад, ки дар он $a > 0$ ва $a \neq 1$ аст. Тавре дар банди 10 дидем, соҳаи қиматҳои функсияи $y = a^x$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+ = (0; \infty)$ аст. Аз ҳамин сабаб, ҳангоми $b \leq 0$ будан муодилаи (1) ҳал надорад. Ҳангоми $b > 0$ будан аз

сабаби он ки функсия афзуншаванда (дар ҳолати $a > 1$ будан) ё камшаванда (дар ҳолати $0 < a < 1$ будан) аст ва ҳар як қимати худро расо як маротиба қабул мекунад, муодилаи (1) танҳо як реша дорад. Барои ёфтани ин реша адади b -ро дар намуди $b = a^c$ ифода кардан лозим аст. Аз баробарии $a^x = a^c$ ва хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ бармеояд, ки $x = c$ решаи (1) мебошад (ниг. ба расмҳои 23 ва 24).

Э з о ҳ и 1. Муодилаҳои нишондиҳандагӣ, ки бо онҳо мо дар курси мактабӣ сару кор дорем, чун қоида ба муодилаҳои намуди $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, ки $f(x)$ ва $g(x)$ функсияҳои нисбатан содаанд, оварда мешаванд. Муодиларо бо муодилаи ба он баробарқувваи $f(x) = g(x)$ иваз карда, ҳалли охириро меёбанд. Аз сабаби баробарқуввагӣ ин ҳал ҳалли матлуби муодилаи аввала аст.

Э з о ҳ и 2. Фаҳмост, ки тасвири ҳар гуна адади мусбати b дар намуди a^c осон нест. Масалан, барои ёфтани ҳалли муодилаи $2^x = 3$ адади 3-ро дар намуди 2^c ифода кардан лозим меояд. Гарчанде чунин c вучуд дошта, ягона аст (вай адади иррационалӣ мебошад), мо ҳанӯз тайёр нестем, ки онро аниқ ё тақрибӣ нависем. Тарзи ҳалли ин гуна муодилаҳо дар банди 18-и ҳамин боб оварда мешавад.

Акнун мисолҳои мушаххасро дида мебароем.

М и с о л и 1. Муодилаи $6^{2x-3} = \sqrt[3]{36}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $36 = 6^2$ ва $\sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{6^2} = 6^{\frac{2}{3}}$ аст, пас муодиларо дар намуди $6^{2x-3} = 6^{\frac{2}{3}}$ навиштан мумкин аст. Асосҳо якхела шуданд. Дараҷаҳои мувофиқро баробар карда,

муодилаи $2x - 3 = \frac{2}{3}$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо:

$$6x - 9 = 2; \quad 6x = 11; \quad x = 1\frac{5}{6}.$$

Ҷ а в о б: $1\frac{5}{6}$.

М и с о л и 2. Решаи муодилаи $0,25^{\frac{9x-20}{2}} = 0,5^{x^2}$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Аввал қисми чапи муодиларо табдил медиҳем:

$$0,25^{\frac{9x-20}{2}} = (0,5^2)^{\frac{9x-20}{2}} = 0,5^{2 \cdot \frac{9x-20}{2}} = 0,5^{9x-20}.$$

Ҳамин тариқ, ҳалли муодилаи

$$0,5^{9x-20} = 0,5^{x^2}$$

-ро ёфтан лозим аст. Решаҳои ин муодила фақат ҳамон ададҳои x мебошанд, ки онҳо решаи $9x - 20 = x^2$ ё $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) = 0$ ҳастанд. Реша будани ададҳои 4 ва 5 возеҳ аст.

Ҷ а в о б: 4; 5.

М и с о л и 3. Ҳалли муодилаи $4^x + 4^{x-1} = 1,25$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Дорем: $4^{x-1} = \frac{4^x}{4}$. Инро дар муодила гузошта,

$$4^x + \frac{4^x}{4} = 1,25 \quad \text{ё} \quad 4 \cdot 4^x + 4^x = 5 \quad \text{ва} \quad \text{ё} \quad 5 \cdot 4^x = 5 \text{-ро ҳосил мекунем.}$$

Ҳамин тариқ, $4^x = 1$ ё $4^x = 4^0$. Аз ин ҷо: $x = 0$.

Ҷ а в о б: 0.

Дар баъзе ҳолатҳо дар муодила функцияи номаълумдор дар дараҷаҳои гуногун меояд. Ин гуна муодилаҳоро бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал кардан мумкин аст.

М и с о л и 4. Муодилаи $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Зарбшавандаи узви якуми муодиларо дар намуди $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ ва узви дуюмро дар намуди $3^{x+1} = 3^x \cdot 3 = 3 \cdot 3^x$ тасвир карда, муодиларо дар намуди $2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 9 = 0$ менависем. $3^x = t$ ишорат карда, муодилаи $2t^2 - 3t - 9 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодилаи квадратиро меёбем:

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{4}; \quad t_1 = -\frac{6}{4} = -1,5; \quad t_2 = \frac{12}{4} = 3.$$

Муодилаи $3^x = t_1 = -1,5$ ҳал надорад, чунки $-1,5 < 0$ аст. Муодилаи $3^x = t_2 = 3$ дорои решаи $x = 1$ аст.

Ҷ а в о б: 1.

Дар охир боз ҳалли се муодиларо меорем, ки онҳо нисбат ба муодилаҳои муоинашуда мураккабанд.

М и с о л и 5. Муодилаи $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Қисмҳои чап ва рост муодиларо чунон табдил медиҳем, ки дар асос 5 бошад:

$$\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \left[(5^3)^{3-2x} \right]^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}(3-2x)}; \quad \frac{5}{\sqrt[4]{5}} = \frac{5}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{1-\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}.$$

Аз ин табдилдиҳиҳо бармеояд, ки муодила ба муодилаи хаттии $\frac{3}{4}(3-2x) = \frac{3}{4}$ ё $3-2x = 1$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо меёбем, ки $x = 1$ аст.

Ҷ а в о б: 1.

М и с о л и 6. Решаи муодилаи $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $2^{2x} = 4^x$, $3^{2x} = 9^x$ аст, пас решаи муодилаи $3 \cdot 4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$ -ро ёфтан лозим аст. Ин муодиларо узв ба узв ба 9^x тақсим мекунем:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0 \quad \text{ё} \quad 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Тағйирёбандаи $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ -ро дохил карда, муодилаи квадрати $3t^2 + t - 2 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодила

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}; \quad t_1 = -1; \quad t_2 = \frac{2}{3}$$

ҳастанд. Муодилаи $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t_1 = -1$ ҳал надошта, решаи

муодилаи $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t_2 = \frac{2}{3}$ бошад, $x=1$ аст.

Ҷ а в о б: 1.

М и с о л и 7. Муодилаи $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ аст, пас муодилаи

додашударо чунин навишта метавонем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

Гузориши $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = y$ моро ба муодилаи $\frac{1}{y} + y = 4$ ва ё

$y^2 - 4y + 1 = 0$ меорад. Решаҳои ин муодилаи квадратӣ чунинанд: $y_1 = 2 - \sqrt{3}$; $y_2 = 2 + \sqrt{3}$. Ба номаълуми аввала баргашта, ҳосил мекунем:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}; \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^1; \frac{x}{2} = 1; x = 2;$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}; \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^{-1}; \frac{x}{2} = -1; x = -2.$$

Ҷ а в о б: -2; 2.

Х у л о с а. Муоинаи дақиқи тарзи ҳалли мисолҳои 1-7 нишон медиҳад, ки дар табдилдиҳии муодилаҳои (ифодаҳои) нишондиҳандагӣ баробариҳое, ки хосиятҳои асосии дараҷаро ифода менамоянд, нақши асосиро мебозанд (ниг. ба баробариҳои 1) – 5) –и банди 10-и §3).

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Баробариҳоеро, ки хосиятҳои асосии дараҷаро ифода менамоянд, нависед.

2. Чӣ гуна муодиларо муодилаи нишондиҳандагӣ меноманд?

3. Ҷаро муодилаи (1) ё ҳал надорад, ё танҳо якто ҳал дорад?

4. Дар кадом ҳолат дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳалли муодиларо осон мекунад?

5. Раванди ҳалли муодилаҳои нишондиҳандагиро фаҳмонед;

6. Ҷаро муодилаи (1)-ро муодилаи нишондиҳандагии одитарин меноманд?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед (117-126):

117. а) $2^x = 32$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; в) $4^x = 128$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{625}$.

118. а) $2^{x-2} = 1$; б) $3^{5x+1} = 9^{2x}$; в) $\sqrt[3]{2^{x-1}} = \sqrt{2}$; г) $\sqrt{7^{2x+6}} = \frac{7}{\sqrt[4]{7}}$.

119. а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{49}{9}\right)^{-3}$; б) $\left(\frac{16}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^5$;
в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\frac{5}{2}\right)^6$.

120. а) $4^{x+1} + 4^x = 320$; б) $3^{x+2} - 3^{x+1} = 6$;
в) $5^{3x+6} - 5^{3x+4} = 600$; г) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 120 = 0$.

121. а) $4^x + 2^x = 2$; б) $9^x - 3^x - 6 = 0$;
в) $4^{x+1} + 2^x - 5 = 0$; г) $4^x - 3(\sqrt{4})^x - 4 = 0$.

122. а) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 5$; б) $2 \cdot 9^x + 9^{x-1} = 19$;
в) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$; г) $5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 24$.

123. а) $2^{x-1} = 3^{x-1}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$;
в) $6^{x+1} = 7^{x+1}$; г) $8^{x-3} = 9^{3-x}$.

$$124. \text{ а) } 3^{4x+10} \cdot 5^{6x+2} = 15^{5x+6}; \quad \text{б) } \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{12}\right)^{4x+1};$$

$$\text{в) } 2^x \cdot 5^x = 10^{3x+1}; \quad \text{г) } 7^{4x+3} \cdot 3^{4x+3} = 21^{2x-1}.$$

$$125. \text{ а) } 2^x + 2^{4-x} = 10; \quad \text{б) } \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{2}{3};$$

$$\text{в) } 9^{\sqrt{x-3}} + 3 = 4 \cdot 3^{\sqrt{x-3}}; \quad \text{г) } 4^x - 0,25^{x-2} = 15.$$

$$126. \text{ а) } \left(\frac{2}{3}\right)^{71\sqrt{x-1}-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3\sqrt{x-1}-293}; \quad \text{б) } \left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x} = \left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x};$$

$$\text{в) } 11 - 3^x = \sqrt{3^x - 5}; \quad \text{г) } 3^{x+1} - 2 = \sqrt{10 - 3^{x+2}}.$$

Машиқҳо барои такрор

127. Маълум, ки $0,1^x < 0,1^y$ аст. x калон аст ё y ? Агар $3,2^x < 3,2^y$ бошад - чӣ?

128. Муодилаи ирратсионалиро ҳал кунед:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0.$$

129. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y = -x^2 + 4x - 3$ ва $y = 0$ маҳдуд аст, ҳисоб кунед.

130. Барои истеҳсоли як детал коргари якум нисбат ба коргари дуюм 6 дақиқа вақт кам сарф мекунад. Ҳар кадоми онҳо дар муддати 7 соат чанд детал истеҳсол менамоянд, агар маълум бошад, ки коргари якум дар ин муддат 8-то детал зиёд истеҳсол кардааст?

12. НОБАРОБАРИИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Ҳалли одитарин нобаробариҳои нишондиҳандагӣ, аз қабили $a^x > b$; $a^x \geq b$; $a^x < b$; $a^x \leq b$ ба хосиятҳои маълуми функсияи $y = a^x$ таъя мекунад. Нобаробариҳое, ки бо онҳо сару кор хоҳем дошт, аслан бо ёрии табдилоти айниятӣ ба намуди

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \quad \text{ё} \quad a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

оварда мешаванд. Ҳангоми ҳалли онҳо ҳаминро бояд ба эътибор гирифт, ки функсияи $y = a^x$ дар тамоми тирӣ ададӣ муайян буда, ҳангоми $a > 1$ будан афзуншаванда ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан камшаванда аст. Масалан, нобаробарии $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ ҳангоми $a > 1$ будан ба нобаробарии $f(x) \geq g(x)$ ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан ба нобаробарии $f(x) \leq g(x)$ баробаркувва аст. Вобаста ба бузургии a ҳалли яке аз нобаробариҳои мазкур ҳалли матлуби нобаробарии дар аввал додашуда мебошад.

М и с о л и 1. Нобаробарии $7^{2x-1} \leq 7^{14-3x}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски функсияи нишондиҳандагии $y = 7^x$ афзуншаванда аст, пас ба қимати ками функсия қимати ками аргумент рост меояд. Барои ҳамин, нобаробарии мазкур ба нобаробарии

$$2x - 1 \leq 14 - 3x$$

баробаркувва аст. Ин нобаробарии хаттиро ҳал карда меёбем, ки $x \leq 3$ мебошад.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 3]$.

М и с о л и 2. Ҳалли нобаробарии $0,4^{5x-1} > 0,16$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Баробарии $0,16 = 0,4^2$ - ро ба назар гирифта,

нобаробарио дар шакли $0,4^{5x-1} > 0,4^2$ менависем. Функцияи $y = 0,4^x$ камшаванда аст (асосаш 0,4 аз 1 хурд аст!). Бинобар ин, nobarobarī ба nobarobarии $5x-1 < 2$ ё $5x < 3$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо: $x < 0,6$.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 0,6)$.

М и с о л и 3. Nobarobarии $2^{x+2} + 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^x \geq 5$ - ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Аз баробарии $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ истифода карда, ҳосил мекунем:

$$2^x \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^x \cdot 2 - 5 \cdot 2^x \geq 5; \quad 4 \cdot 2^x + 6 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x \geq 5;$$

$$2^x(4+6-5) \geq 5; \quad 2^x \cdot 5 \geq 5; \quad 2^x \geq 1; \quad 2^x \geq 2^0; \quad x \geq 0.$$

Ҷ а в о б: $[0; +\infty)$.

М и с о л и 4. Nobarobarии

$$2 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 3^{x+2} < 27$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $9^{x+1} = (3^2)^{x+1} = 3^{2x+2} = 9 \cdot 3^{2x}$ ва $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$ аст, пас nobarobarии додашуда ба nobarobarии

$$18 \cdot 3^{2x} - 45 \cdot 3^x - 27 < 0$$

баробарқувва аст. Агар тағйирёбандаи нав $t = 3^x$ -ро дохил кунем, nobarobarī намуди $18t^2 - 45t - 27 < 0$ ё $2t^2 - 5t - 3 < 0$ -ро мегирад. Ин nobarobarиро ҳал мекунем. Муодилаи квадратии $2t^2 - 5t - 3 = 0$ -ро ҳал карда, решаҳои онро меёбем:

$$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = 3. \quad \text{Яъне,} \quad 2t^2 - 5t - 3 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 3). \quad \text{Методи}$$

фосилаҳоро истифода карда, меёбем, ки $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ ҳалли нобаробарии квадратӣ аст. Аз ин ҷо, бо назардошти $-\frac{1}{2} < t < 3$ ва $t = 3^x$ ба нобаробарии $-\frac{1}{2} < 3^x < 3$ доро мешавем. Нобаробарии якум $-\frac{1}{2} < 3^x$ барои қимати дилхоҳи ҳақиқии x иҷро мешавад. Нобаробарии дуюм $3^x < 3$ бошад, дорои ҳалли $x < 1$ аст.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 1)$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии ҳонандагон

1. Хосиятҳои функсияи нишондиҳандагиро, ки ба онҳо тарзи ҳалли одитарин нобаробарии нишондиҳандагӣ асос карда шудааст, номбар кунед.

2. Чаро дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳалли нобаробариро осон мегардонад? Бо мисол фаҳмонед.

3. Моҳияти методи фосилаҳоро дар ҳалли мисоли мушаххас шарҳ диҳед.

4. Нобаробариҳои одитарини нишондиҳандагиро нависед ва гӯед, ки чаро онҳоро одитарин меноманд?

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Нобаробарии нишондиҳандагиро ҳал кунед (131-136):

131. а) $2^x \geq \frac{1}{2}$; б) $0,2^x < 0,2^5$; в) $(\sqrt{7})^x \geq \frac{1}{49}$; г) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \geq 1$.

132. а) $2^{2-x} < 16$; б) $0,3^{3x-4} > 0,09$; в) $0,1^{2x-1} \leq 0,01$ г) $0,5^{2x-2} \geq 4$.

133. а) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; в) $2^{\frac{3x+3}{2}} \geq 16$; г) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$.

134. а) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$; б) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$;
в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} \geq 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$; г) $7^{2x-1} - 7^{x+1} < 7^{x-1} - 7$.

135. а) $\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > \frac{21}{16}$; б) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;
в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geq 4$; г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \leq \frac{5}{2}$.

136. а) $\pi^x - \pi^{2x} \geq 0$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - 6 \cdot 2^{-x} - 8 < 0$;
в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 28 \cdot 3^{-x-1} + 3 < 0$ г) $4^x + 2^x - 2 \geq 0$.

Машиқҳо барои такрор

137. Графики функцияи $y = -x^2 + 1$ -ро кашед. Барои кадом қимати x ин функция қимати калонтарин қабул мекунад?

138. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15. \end{cases}$$

139. Узви якуми прогрессияи геометрии (b_n) -ро ёбед, агар:

а) $b_5 = \frac{1}{64}$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_6 = 243$, $q = -3$ бошад.

140. Қимати ифодаи $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$ -ро ёбед.

141. Қимати $\cos \alpha$ ва $\operatorname{tg} \alpha$ -ро ёбед, агар маълум бошад, ки

$\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ аст.

142. Муодиларо ҳал кунед: $3^x - \frac{6}{3^x} = 1$.

13. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Тарзи ёфтани ҳалли системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ҳалли муодилаи нишондиҳандагиро мемонад. Чун пештара аз хосиятҳои функцияи нишондиҳандагӣ ва аз баробарихое, ки бо онҳо хосияти асосии дараҷа ифода меёбанд, истифода карда, системаи нишондиҳандагиро ба системаи ба он баробарқувваи алгебравӣ иваз мекунем. Ҳал кардани ин система боқӣ мемонад. Мисолҳои мушаххасро дида мебароем.

М и с о л и 1. Ҳалли системаи зеринро меёбем:

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 9, \\ 3^{3x-2y-1} = 1. \end{cases}$$

Ҳ а л. Баробарихои $9 = 3^2$ ва $1 = 3^0$ -ро ба эътибор гирифта, системаро ба системаи алгебравии

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

иваз мекунем. Ин системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем. Аз

муодилаи якум $x = 2 - y$ -ро ёфта, ба муодилаи дуюм мегузорем:

$$3(2 - y) - 2y - 1 = 0 \text{ ё } 5 - 5y = 0.$$

Аз ин ҷо: $y = 1$. Пас, $x = 2 - y = 2 - 1 = 1$.

Ҷ а в о б: (1; 1).

М и с о л и 2. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} 3^{x+1} + 2^y = 13, \\ 3^{x+2} + 2^{y+3} = 59 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Аз баробарии 1)-и ҳосияти асосии дараҷа (ниг. ба банди 10) истифода карда, системаро ба системаи ба вай баробарқувваи нишондиҳандагии

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^x + 2^y = 13, \\ 9 \cdot 3^x + 8 \cdot 2^y = 59 \end{cases}$$

иваз мекунем. Агар дар ин муодилаҳо $a = 3^x$ ва $b = 2^y$ гузорем, он гоҳ системаи муодилаҳои алгебравии

$$\begin{cases} 3a + b = 13, \\ 9a + 8b = 59 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Нуқтаи $(a; b) = (3; 4)$ ҳалли ин системаи хаттӣ аст. Акнун муодилаҳои одии $3^x = 3$ ва $2^y = 4$ -ро ҳал карда, меёбем: $x = 1$; $y = 2$.

Ҷ а в о б: (1; 2).

М и с о л и 3. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 4^x = 16y, \\ 2^{x+1} = 4y. \end{cases}$$

Ҳ а л. Ҳар ду тарафи муодилаи якумро ба 4 тақсим карда, меёбем: $4^{x-1} = 4y$. Аз ин истифода карда, муодилаи дуёми системаро ба таври $2^{x+1} = 4^{x-1}$ ё $2^{x+1} = 2^{2(x-1)}$ менависем. Аз ин ҷо $x+1 = 2(x-1)$, яъне $x = 3$. Акнун аз муодилаи $4^3 = 16y$ бармеояд, ки $y = 4$.

Ҷ а в о б: (3; 4).

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна системаи муодилаҳоро системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ меноманд?
2. Агар як муодилаи система нишондиҳандагӣ бошад, ҳуди системаро метавонем нишондиҳандагӣ номем?
3. Барои ҳалли системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ аз кадом баробариҳо истифода мебаранд?
4. Як системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ тартиб дода, раванди ҳалли онро шарҳ диҳед.

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (143-144):

$$143. \text{ а) } \begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5^{2x-y} = \sqrt{5}, \\ 3^{4y-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 2^{y-2x} = \frac{1}{32}, \\ 2^{x-y+1} = 16; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2y} = 49, \\ 7^{8x-\frac{y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

$$144. \text{ а)} \begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 0, \\ 6^x \cdot 3^y = 18; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3^x + 3^y = 6, \\ 7^{x+y} = 49; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 2^x - 2^y = 24, \\ x + y = 8; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \sqrt{xy} = 20. \end{cases}$$

Машқҳо барои такрор

145. Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед:

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18.$$

146. Дар имтиҳон 25%-и талабагон ягон масъаларо ҳал карда натавонистанд. 150 нафар талаба ақаллан якто масъаларо ҳал кардааст. Дар имтиҳон чанд нафар талаба иштирок дошт?

147. Қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ -ро дар порчаи } [-0,5; 0,5] \text{ ёбед.}$$

148. Ҳисоб кунед:

$$\text{а)} \int_0^2 (1+2x)^2 dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx.$$

149. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

$$\text{а)} y = \frac{2-x}{x-1};$$

$$\text{б)} y = \sqrt{4-x^2}.$$

§5. ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

14. ТАЪРИФИ ЛОГАРИФМИ АДАД

Ба муодилаи $a^x = b$ бармегардем. Дар банди 11 муайян карда будем, ки ҳангоми $b > 0$ будан ин муодила ҳалли ягона дорад ва агар b -ро дар намуди $b = a^c$ тасвир карда тавонем, он гоҳ $x = c$ ҳалли муодила аст. Дар эзоҳи 2-и ҳамон ҷой қайд шуда буд, ки чунин тасвир на барои ҳар гуна адади $b > 0$ назаррас аст (Аз ҳамин сабаб, ҳамаи муодилаҳо ва нобаробариҳое дар бандҳои 11-13 оварда шуда, чунон интиҳоб шуда буданд, ки барояшон ин тасвир амалан возеҳ бошад.).

Решаи муодилаи $a^x = b$ -ро бо $\log_a b$ ишорат мекунанд. Яъне, $\log_a b = c$ адади ҳақиқиест, ки ҳангоми $b > 0$, $a > 0$ ва $a \neq 1$ будан айнtimer

$$a^c = b$$

-ро қаноат мекунонад. Навишти $\log_a b = c$ ин тавр хонда мешавад: *логарифми b аз рӯи асоси a ё логарифми асосаи a аз адади b ва ё логарифми a -и адади b ба c баробар аст*. Ададе, ки асоси логарифмро ташкил медиҳад, дар сатри поён навишта мешавад.

Ҳамин тариқ, **логарифми адади b аз рӯи асоси a гуфта, адади c -ро меноманд, агар a дар дараҷаи c ба b баробар бошад.**

Ин таърифро математикӣ ин тавр навиштан мумкин аст: $\log_a b = c$ аст, агар $a^c = b$ бошад ва баръакс, агар $a^c = b$ бошад, он гоҳ $\log_a b = c$ аст.

Аз таърифи логарифм бевосита баробарии

$$a^{\log_a b} = b$$

бармеояд, ки он **айнияти асосии логарифмӣ** ном дорад.

Аз таърифи логарифм бармеояд, ки:

$$2^5 = 32,$$

$$5 = \log_2 32;$$

$$10^2 = 100,$$

$$2 = \log_{10} 100;$$

$$3^4 = 81,$$

$$4 = \log_3 81;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8,$$

$$-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8;$$

$$a^y = x,$$

$$y = \log_a x;$$

$$a^c = b,$$

$$c = \log_a b.$$

Баробариҳои мувофиқи ҳар ду сутун баробарқувваанд: яке дигареро ба миён меорад ва баръакс. Яъне, $2^5 = 32$ ва $\log_2 32 = 5$ тасдиқи худи ҳамон як чиз аст.

Таърифи логарифм имкон медиҳад, ки муодилаҳои намуди

$$1) a^x = b; \quad 2) x^a = b,$$

ки дар онҳо аз рӯи ду адади додашуда ёфтани адади сеюм талаб карда мешавад, ҳал карда шаванд.

М и с о л и 1. Логарифми адади 27-ро аз рӯи асоси 9 меёбем.

Ҳ а л. Бигузор $x = \log_9 27$ бошад. Мувофиқи таърифи логарифм $9^x = 27$ мебошад, вале $9 = 3^2$ ва $27 = 3^3$. Пас, $3^{2x} = 3^3$ ва аз ин ҷо $2x = 3$ ё $x = \frac{3}{2}$.

М и с о л и 2. Асосеро меёбем, ки логарифми адади 32 аз рӯи он ба 10 баробар аст.

Ҳ а л. Мувофиқи шарт $\log_x 32 = 10$ мебошад. Аз ин ҷо дар асоси таърифи логарифм меёбем, ки $x^{10} = 32$ аст. Пас,

$x = \sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Хамин тариқ, $\log_{\sqrt{2}} 32 = 10$ будааст.

М и с о л и 3. Ададери меёбем, ки логарифми он аз рӯйи асоси 64 ба $-\frac{2}{3}$ баробар аст.

Ҳ а л. Агар адади матлубро бо x ишорат кунем, он гоҳ бояд $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$ шавад. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи

логарифми адад $x = 64^{-\frac{2}{3}}$ ё $x = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(4^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. Инак,

$\log_{64} \frac{1}{16} = -\frac{2}{3}$ аст.

М и с о л и 4. Аз айнияти асосии логарифмӣ истифода карда, қимати ифодаи $3^{3-\log_3 18}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Дорем: $3^{3-\log_3 18} = \frac{3^3}{3^{\log_3 18}} = \frac{27}{18} = 1,5$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Таърифи логарифми ададро баён кунед ва онро бо мисолҳо шарҳ диҳед.

2. Кадом намуди муодилаҳоро бевосита бо истифодаи таърифи логарифми адад ҳал кардан мумкин аст?

3. Ифодаеро оред, ки барои ҳисоби қимати он айнияти асосии логарифмӣ истифода шавад.

4. Логарифми адад дар кадом мавридҳо вучуд надорад?

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Дуруст будани баробариҳои зеринро санҷед (150-152):

150. а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;

в) $\log_{17} 1 = 0$; г) $\log_4 64 = 3$.

151. а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; б) $\log_{0,2} 0,04 = 2$;

в) $\log_{10} 0,01 = -2$; г) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$.

152. а) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64} = -3$; б) $\log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}$; г) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

153. Логарифми ададро аз рӯи асоси a ёбед:

а) 32 ; $\frac{1}{8}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; ҳангоми $a = 2$ будан;

б) 1000 ; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[5]{100}$ ҳангоми $a = 10$ будан;

в) 9 ; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[6]{3}$ ҳангоми $a = 3$ будан.

154. Аз баробарӣ асоси логарифмро ёбед:

а) $\log_x 9 = 2$; б) $\log_x \frac{1}{8} = -3$;

в) $\log_x \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$; г) $\log_x 243 = 3$.

Адади x -ро ёбед (155-156):

$$155. \text{ а) } \log_2 x = -1; \quad \text{ б) } \log_{\frac{1}{5}} x = -2;$$

$$\text{ в) } \log_4 x = 2; \quad \text{ г) } \log_6 x = -2.$$

$$156. \text{ а) } \log_9 x = -2; \quad \text{ б) } \log_{\sqrt{3}} x = 0;$$

$$\text{ в) } \log_{\frac{1}{7}} x = 1; \quad \text{ г) } \log_{\frac{1}{2}} x = -5.$$

157. Ададро дар намуди логарифми асосаш a нависед:

$$\text{ а) } 2; -2; 1; 0 \quad \text{ хангоми } a = 4 \text{ будан;}$$

$$\text{ б) } 1; -1; 0; 4 \quad \text{ хангоми } a = 2 \text{ будан;}$$

$$\text{ в) } 4; -1; 1; 2 \quad \text{ хангоми } a = 3 \text{ будан;}$$

$$\text{ г) } -3; -2; 2; 1 \quad \text{ хангоми } a = 5 \text{ будан.}$$

Аз айнияти асосии логарифмӣ истифода карда, ифодаро сода кунед (158-160):

$$158. \text{ а) } 1,2^{\log_{1,2} 3}; \quad \text{ б) } \pi^{\log_{\pi} 3,14}; \quad \text{ в) } 2^{\log_2 1}; \quad \text{ г) } 2,8^{\log_{2,8} 1,4}.$$

$$159. \text{ а) } 4^{1+\log_4 3}; \quad \text{ б) } 10^{1-\log_{10} 3}; \quad \text{ в) } \left(\frac{1}{8}\right)^{1+\log_{\frac{1}{8}} 4}; \quad \text{ г) } 2^{2-\log_2 8}.$$

$$160. \text{ а) } 3^{2\log_3 2}; \quad \text{ б) } 2^{-2\log_2 4}; \quad \text{ в) } \left(\frac{1}{4}\right)^{2\log_{\frac{1}{4}} 2}; \quad \text{ г) } \left(\frac{1}{12}\right)^{2\log_{\frac{1}{12}} 1}.$$

Машиқҳо барои такрор

$$161. \text{ Нобаробарино ҳал кунед: } \left(\frac{1}{3}\right)^{7x-1} \leq 27.$$

162. Ба маҳлули 18 фоизаи намаки вазнаш 2 кг 0,25 кг об рехтанд. Маҳлули чандфоизаи намак ҳосил шуд?

163. Ҳисоб кунед: $10+11+12+\dots+98+99$.

164. Муодилаи тригонометриро ҳал кунед:

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

165. Муодилаи ратсионалиро ҳал кунед:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}.$$

15. ХОСИЯТҲОИ ЛОГАРИФМ

Бигузор a адади дилхоҳи мусбат ва нобаробари як бошад. Аз таърифи логарифми адад бармеояд, ки:

$$\text{I. } \log_a 1 = 0; \quad \text{II. } \log_a a = 1.$$

Шумо аллакай ҳангоми иҷрои машқҳои банди 14 чой доштани ин баробариҳоро барои a -и мушаххас пайхас кардаед (масалан, ҳангоми иҷрои машқи 156).

Фарз мекунем, ки x , y ададҳои дилхоҳи мусбат ва p адади дилхоҳи ҳақиқӣ аст. Нишон медиҳем, ки баробариҳои зерин чой доранд:

$$\text{III. } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$\text{IV. } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\text{V. } \log_a x^p = p \log_a x.$$

Барои исботи хосияти III аз айнияти асосии логарифмӣ истифода мекунем:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y}.$$

Ин баробариҳоро узв ба узв зарб карда, ҳосил мекунем:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Вале мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ $xy = a^{\log_a(xy)}$, пас $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Аз ин ҷо, мувофиқи хосияти функцияи нишондиҳандагӣ баробарии $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ бармеояд.

Ҳамин тариқ, логарифми ҳосили зарб ба суммаи логарифмҳои зарбшавандаҳо баробар аст. Аён аст, ки ин хосият барои микдори дилхоҳи зарбшавандаҳо низ дуруст мебошад. Масалан, $\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

Акнун исботи хосияти IV-ро меорем. Барои ин боз айнияти асосии логарифмиро истифода мекунем. Мувофиқи он $\frac{x}{y} = a^{\log_a \frac{x}{y}}$ мешавад. Аз тарафи дигар, $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$.

Аз ин ду баробарӣ ҳосил менамоем:

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = a^{\log_a x - \log_a y} \quad \text{ва аз ин ҷо} \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Инак, логарифми ҳосили тақсим ба фарқи логарифми сураат ва логарифми махраҷ баробар аст.

Барои исботи хосияти V силсилаи баробариҳоро, ки онҳо аз айнияти асосии логарифмӣ бармеоянд, менависем:

$$x^p = a^{\log_a x^p} = \left(a^{\log_a x}\right)^p = a^{p \log_a x}.$$

Аз ин ҷо, мувофиқи хосияти функцияи нишондиҳандагӣ

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

Яъне, логарифми дараҷа ба ҳосили зарби нишондиҳандаи дараҷа бар логарифми асоси ин дараҷа баробар аст.

Хосиятҳои I-V-и ҳосилкардамон хосиятҳои асосии логарифм ном доранд. Онҳоро хосиятҳои умумӣ ҳам мегӯянд, чунки онҳо аз асос вобаста нестанд (танҳо зарур аст, ки $a > 0$ ва $a \neq 1$ бошад).

Х у л о с а и 1. Аз хосияти V ва айнияти асосии логарифмӣ бармеояд, ки барои ҳар гуна ададҳои $a > 0$, $b > 0$ ва $a \neq 1$, $b \neq 1$ айнияти зерин ҷой дорад:

$$a^x = b^{x \log_b a}.$$

Дар ҳақиқат, $b^{x \log_b a} = b^{\log_b a^x} = a^x$.

Х у л о с а и 2. Агар x , a , b ададҳои мусбат бошанд ва $a \neq 1$, $b \neq 1$ бошад, он гоҳ формулаи

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ҷой дорад, ки вай *формулаи гузариш* аз логарифми як асос ба логарифми асоси дигар ном дорад.

Барои исботи ин формула боз айнияти асосии логарифмӣ ва хосияти V–и логарифмро истифода мекунем:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Қисмҳои чап ва рости ин баробариро ба $\log_b a$ тақсим карда, формулаи матлубро ҳосил мекунем.

Формулаи гузариш имконият медиҳад, ки аз ҷадвали пешакӣ сохташудаи логарифмҳои ададҳо аз рӯи асоси додашудаи b истифода карда, логарифми ададро аз рӯи асоси дилхоҳи a ёбем. Бо ин мақсад, аксар вақт ҷадвалҳои логарифмҳои даҳӣ ё логарифмҳои натуралӣ, ки онҳоро дар бештари воситаҳои таълимии мактабӣ дарёфт кардан мумкин аст, истифода мешаванд. Агар асоси логарифм ба 10 баробар бошад, онро логарифми даҳӣ меноманд. Ишорати *логарифми даҳӣ* $\lg$ аст, яъне $\lg x = \log_{10} x$. Бо логарифми натуралӣ дар банди 17 шинос хоҳем шуд.

Формулаи гузариш инчунин барои ёфтани ҳалли муодилаҳое, ки дар таркибашон аз рӯи асосҳои гуногун логарифм доранд, васеъ истифода карда мешавад.

Х у л о с а и 3. Баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\log_{a^q} x = \frac{1}{q} \log_a x \quad (q \neq 0); \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}.$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи гузариш қисми чапи формулаи якумро ин тавр навишта метавонем:

$$\log_{a^q} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^q} = \frac{\log_a x}{q \log_a a} = \frac{1}{q} \log_a x.$$

(Хосиятҳои V ва II –ро истифода кардем). Формулаи дуюм бевосита аз формулаи гузариш ҳангоми $b = x$ будан бармеояд.

Хосиятҳои асосии логарифмҳо, формулаи гузариш ва формулаҳои дар ду ҳулосаи дигар овардашуда ҳангоми айнитан табдил додани ифодаҳои дар таркибашон логарифмдошта истифода мешаванд. Масалан, хосияти III имконият медиҳад, ки ёфтани ҳосили зарб ба ёфтани логарифми суммаи онҳо ва баъд ба ёфтани адад аз рӯи логарифми ёфташуда иваз карда шавад. Айнан ба ҳамин монанд, хосияти V ба дараҷабардориро ба зарби дараҷа бар логарифми адади додашуда, сонӣ аз рӯи логарифм ёфтани натиҷа меоварад. Яъне, ҳисоб бо истифодаи логарифмҳо аз ду зина иборат аст: логарифмгирӣ ва потенсиронӣ.

Раванди ҳисоби логарифми ифодаро аз рӯи асоси додашуда *логарифмгирӣ* ва раванди ёфтани ифодаро аз рӯи логарифми додашудаи ин ифода *потенсиронӣ* меноманд. Зоҳиран фаҳмост, ки ин ду раванд нисбат ба ҳамдигар мувофиқан баръаксанд.

Барои амалан мустаҳкам кардани маводи дар боло овардашуда чанд мисолро дида мебароем.

М и с о л и 1. Аз рӯи асоси 2 аз ифодаи $16a^5\sqrt[3]{b^2}$ логарифм мегирем.

Ҳ а л. Хосиятҳои III ва V -и логарифмро истифода карда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}\log_2\left(16a^5\sqrt[3]{b^2}\right) &= \log_2\left(16 \cdot a^5 \cdot b^{\frac{2}{3}}\right) = \log_2 16 + \log_2 a^5 + \log_2 b^{\frac{2}{3}} = \\ &= 4 + 5\log_2 a + \frac{2}{3}\log_2 b.\end{aligned}$$

М и с о л и 2. Қимати ифодаи $\frac{\lg 96 - \lg 24}{\lg 5 + \lg 3,2}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Аз хосиятҳои III, IV ва баъд аз V истифода карда, сурат ва махраҷро табдил медиҳем:

$$\begin{aligned}\lg 96 - \lg 24 &= \lg \frac{96}{24} = \lg 4 = \lg 2^2 = 2\lg 2, \\ \lg 5 + \lg 3,2 &= \lg(5 \cdot 3,2) = \lg 16 = \lg 2^4 = 4\lg 2.\end{aligned}$$

Пас,

$$\frac{\lg 96 - \lg 24}{\lg 5 + \lg 3,2} = \frac{2\lg 2}{4\lg 2} = \frac{1}{2}.$$

М и с о л и 3. Қимати ифодаи $\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 4,5$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Хосиятҳои III-V –ро истифода мекунем:

$$\begin{aligned}\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 4,5 &= \log_3 8 - \log_3 2^2 + \log_3 \frac{9}{2} = \\ &= \log_3 8 - \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{2} = \log_3 \frac{8}{4} + \log_3 \frac{9}{2} = \log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2} = \\ &= \log_3 \left(2 \cdot \frac{9}{2}\right) = \log_3 9 = 2.\end{aligned}$$

М и с о л и 4. Қимати ифодаи $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Формулаи дуҷуми ҳулосаи 3-ро истифода карда, дар

нишондиҳандаи дараҷа ба логарифми асоси 7 мегузарем ва баъд аз рӯйи айнияти асосии логарифмӣ меёбем:

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}} = \left[\left(7\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{\log_2 7}} = 7^{\frac{1}{\log_2 7}} = 7^{\log_7 2} = 2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Хосиятҳои асосии логарифмро номбар кунед.
2. Дурустии хосиятҳои логарифмро бо мисолҳои ададӣ санҷед.
3. Як тарзи истифодаи формулаи гузаришро қайд кунед.
4. Логарифми даҳӣ гуфта, чиро мегӯянд? Вай чӣ тавр ишорат карда мешавад?
5. Моҳияти равандҳои логарифмгирӣ ва потенсирониро шарҳ даҳед. Чаро онҳо амалиёти баръаксанд?
6. Хосиятҳои логарифм ва хулосаҳои онҳо барои чӣ лозиманд?

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

166. Аз ифодаҳои зерин, аз рӯйи асоси 2 логарифм гиред ($a > 0, b > 0$):

а) $(2a^2b)^4$; б) $\left(\frac{4a^2}{\sqrt[3]{b^3}}\right)^{-0,2}$; в) $\left(\sqrt[5]{8a^2b}\right)^{\frac{4}{5}}$; г) $\frac{a^2}{16b^6}$.

167. Аз рӯйи асоси 10 логарифм гиред ($a > 0, b > 0, c > 0$):

а) $100\sqrt{a^4b^2c}$; б) $\frac{10}{a^2bc^3}$; в) $10^{-2}a^2b^4c^{\frac{5}{6}}$; г) $\frac{b^{\frac{4}{5}}}{10^4a^5}$.

168. Ёбед: а) $\lg 1000$; б) $\lg 0,1$; в) $\lg 0,0001$; г) $\lg 100$.

169. Маълум, ки $\log_7 2 = a$ ва $\log_7 3 = b$ мебошад.

Ифодаро бо воситаи a ва b нависед:

а) $\log_7 42$; б) $\log_7 21$; в) $\log_7 24$; г) $\log_7 98$.

Ҳисоб кунед (170-171):

170. а) $\lg 4 + \lg 25$; б) $\log_2 9 - \log_2 \frac{9}{16}$;

в) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; г) $\lg 11 - \lg 110$.

171. а) $\frac{\lg 2 + \lg 32}{2\lg 4 - \lg 8}$; б) $\frac{\log_2 125}{\log_2 25}$;

в) $\log_9 13 - \log_9 39$; г) $\log_{0,4} 16 - 2\log_{0,4} 10$.

Аз баробариҳои зерин x -ро ёбед (172-173):

172. а) $\log_4 x = \log_4 5 - \log_4 2 + \log_4 3$;

б) $\log_7 x = 3\log_7 2 - 2\log_7 3 + \log_7 5$;

в) $\log_9 x = \frac{1}{2}\log_9 3 + \frac{2}{3}\log_9 5 - \frac{1}{3}\log_9 2$;

г) $\lg x = \lg \frac{1}{4} - 2\lg \frac{2}{3} + \lg \frac{4}{9}$.

173. а) $\log_2 x = \log_4 2$; б) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} 5$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\log_4 x = \log_2 3 + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Қимати ифодаро ёбед (174-175):

174. а) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$; б) $9^{\log_3 \sqrt{5}}$; в) $2^{\log_4 9}$; г) $7^{\log_{\sqrt[3]{7}} 3}$.

175. а) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; б) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$;

$$\text{в) } \log_{\frac{1}{3}} \log_3 27;$$

$$\text{г) } \log_{\frac{1}{3}} \log_{343} 7.$$

176*. Исбот кунед, ки:

$$\text{а) } \log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_5 \frac{1}{3} \leq -2;$$

$$\text{б) } \log_4 9 + \log_9 4 \geq 2.$$

177*. Исбот кунед, ки агар $a > 0, b > 0, c > 0$ ва $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ бошанд, он гоҳ формулаи

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

чой дорад.

Машқҳо барои такрор

$$\text{178. Муодиларо ҳал кунед: } |5 - x| = 2(2x - 5).$$

$$\text{179. Қимати ифодаи } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{-ро ҳисоб кунед, агар } x_1 \text{ ва } x_2$$

решаҳои муодилаи $3x^2 - 2x - 6 = 0$ бошанд.

180. Функцияи $y = x^2 - 2x + 3$ -ро тадқиқ карда, графикашро соzed.

$$\text{181. Ифодаи } (1 + a^{0,5})^2 - 2a^{0,5} \text{ - ро сода кунед.}$$

$$\text{182. Ҳисоб кунед: } 2 \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

16. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ. ХОСИЯТҲО ВА ГРАФИКИ ОН

Дар бандҳои 9-10 график ва хосиятҳои функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ оварда шуда буданд. Ин функция вобастагии байни y -тарафи чапро нисбат ба тағйирёбии нишондиҳандаи дараҷа x инъикос мекунад. Акнун вобастагии дараҷаро нисбат ба тағйирёбии қимати функция меомӯзем.

Агар $y = a^x$ ($a > 0$ ва $a \neq 1$) бошад, он гоҳ мувофиқи таърифи логарифм

$$x = \log_a y$$

аст. Ишоратҳои аргумент ва функцияро ҷойиваз карда, ҳосил мекунем:

$$y = \log_a x. \quad (2)$$

Т а ъ р и ф. **Функцияро, ки бо формулаи (2) муайян мешавад, функцияи логарифмии асосаш a меноманд.**

Ҳосиятҳои функцияи логарифмиро дида мебароем.

1⁰. Соҳаи муайянии функцияи логарифмӣ маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+ = (0; \infty)$ аст.

Дар ҳақиқат, ифодаи $\log_a x$ барои ҳар гуна адади мусбати ҳақиқии x қимати ягона дорад ва муайян нест, агар $x \leq 0$ бошад.

2⁰. Соҳаи қиматҳои функция маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R = (-\infty; \infty)$ мебошад.

Ин аз он бармеояд, ки муодилаи $\log_a x = y$ барои ҳар гуна адади ҳақиқии y танҳо якто решаи $x = a^y$ -ро дорост.

3⁰. Азбаски функция танҳо барои ададҳои мусбат муайян аст, пас вай на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст.

4⁰. Функцияи логарифмӣ қиматҳои хурдтарин ва калонтарин надорад, чунки соҳаи қиматҳояш тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

5⁰. Нуқтаи буриши графики функцияи логарифмӣ бо тири абсисса нуқтаи $(1; 0)$ аст. Координатаҳои ин нуқта ба асоси функцияи вобастагӣ надорад, чунки решаи муодилаи $\log_a x = 0$ барои ҳар гуна $a > 0$ ба як баробар аст. Қимати $x = 0$ ба соҳаи муайянии функция тааллуқ надорад, бинобар ин график тири ординатро намебурад.

6⁰. Агар $a > 1$ бошад, он гоҳ қиматҳои функсияи логарифмӣ дар фосилаи $(0; 1)$ манфӣ ва дар фосилаи $(1; \infty)$ мусбат мебошанд. Ҳангоми $0 < a < 1$ будан, қиматҳои функсияи логарифмӣ дар фосилаи $(0; 1)$ мусбат ва дар фосилаи $(1; \infty)$ манфианд.

Дар ҳақиқат, бигузор $a > 1$ ва $x > 1$ бошад. Иббот мекунем, ки дар ин ҳолат қиматҳои функсияи логарифмӣ мусбат ҳастанд.

Баръаксашро фарз мекунем. Бигузор чунин қимати $x > 1$ вучуд дошта бошад, ки барояш $\log_a x = y \leq 0$ аст. Аз ин ҷо ва аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ бо асоси $a > 1$ бармеояд, ки $a^y \leq a^0 = 1$ аст. Аз тарафи дигар, мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ бояд $a^y = a^{\log_a x} = x$ шавад. Азбаски $x > 1$ аст, пас $a^y > 1$. Зиддиятро ҳосил кардаем. Ин нишон медиҳад, ки фарзи кардаамон нодуруст будааст.

Ҳолатҳои $a > 1$ ва $x < 1$; $0 < a < 1$ ва $x > 1$; $0 < a < 1$ ва $x < 1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешаванд.

7⁰. Функсияи логарифмӣ дар тамоми соҳаи муайяниаш ҳангоми $a > 1$ будан меафзояд (афзуншаванда аст) ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан кам мешавад (камшаванда аст).

Дар ҳақиқат, бигузор $0 < x_1 < x_2$ ва $a > 1$ буда, $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$ аст. Аз таърифи логарифм бармеояд, ки

$$a^{y_1} = x_1 < x_2 = a^{y_2}, \text{ яъне } a^{y_1} < a^{y_2}.$$

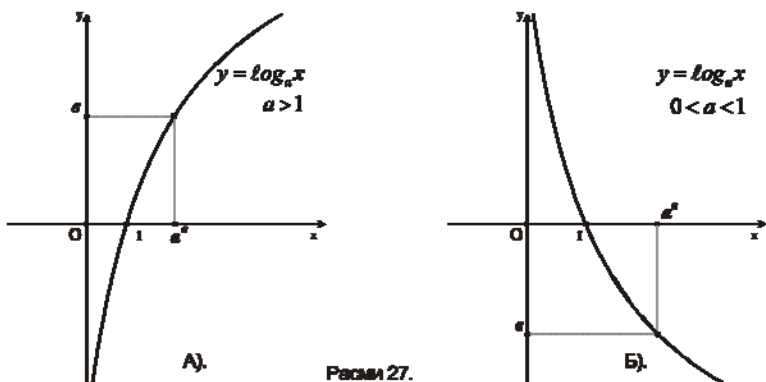
Нобаробарии мазкур ва хосияти афзуншаванда будани функсияи нишондиҳандагии асосаш $a > 1$ -ро истифода карда, ҳосил мекунем:

$$y_1 < y_2.$$

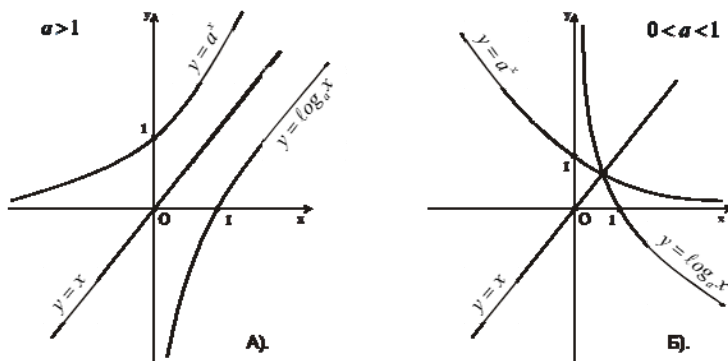
Аз ин ҷо афзуншавандагии функсияи логарифмӣ ҳангоми $a > 1$ будан бармеояд.

Ҳолати $0 < a < 1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешавад.

Акнун ба хосиятҳои $1^0 - 7^0$ тақя карда, функсияи $y = \log_a x$ -ро ҳангоми $a > 0$ будан (расми 27, А) ва ҳангоми $0 < x < 1$ будан (расми 27, Б) схемавӣ месозем.



Агар графикҳои функсияҳои $y = a^x$ ва $y = \log_a x$ -ро дар як системаи координатӣ схемавӣ кашем (расми 28), он гоҳ пай мебарем, ки онҳо нисбат ба хати рости $y = x$ симметрӣ мебошанд. Ин тасдиқро қотеона исбот кардан мумкин аст (Исбот аз доираи математикаи мактабӣ берун аст, бинобар ин оварда намешавад).



Акнун татбиқи хосиятҳои функсияи логарифмиро дар ҳалли чанд мисол дида мебароем.

М и с о л и 1. Соҳаи муайянии функсияи $y = \log_4(2 - 5x)$ -ро меёбем.

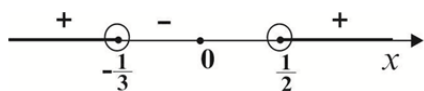
Ҳ а л. Соҳаи муайянии функсияи логарифмӣ $R_+ = (0; \infty)$ аст. Бинобар ин функсияи мазкур танҳо барои ҳамон қиматҳои аргументи x муайян мебошад, ки дар онҳо $2 - 5x > 0$ аст, яъне ҳангоми $x < 0,4$ будан. Пас фосилаи $(-\infty; 0,4)$ соҳаи муайянии функсия аст.

М и с о л и 2. Соҳаи муайянии функсияи $f(x) = \log_2(3 - 2x - x^2)$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Мулоҳизаҳои дар ҳалли мисоли 1 гузаронидаро такрор карда, ба хулоса меоем, ки функсия барои ҳамон қиматҳои x муайян аст, ки дар онҳо $3 - 2x - x^2 > 0$ мебошад. Ин нобаробариро ҳал мекунем. Решаҳои муодилаи $3 - 2x - x^2 = 0$ -ро ёфта, сеузваи квадратии $3 - 2x - x^2$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем: $3 - 2x - x^2 = (3 + x)(1 - x)$. Ҳалли нобаробарии $(3 + x)(1 - x) > 0$ фосилаи $(-3; 1)$ аст.

Инак, соҳаи муайянии функсияи мазкур фосилаи $(-3; 1)$ мебошад.

М и с о л и 3. Соҳаи муайянии функсияи $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{4x-2}$ -ро меёбем.



Расми 29.

Ҳ а л. Нобаробарии $\frac{3x+1}{4x-2} > 0$ -ро бо методи

фосилаҳо ҳал карда (расми 29), ба натиҷа меоем, ки соҳаи муайянии функсия аз якҷояшавии фосилаҳои $(-\infty; -\frac{1}{3})$ ва $(\frac{1}{2}; +\infty)$ иборат аст.

$$\text{Ҷ а в о б: } \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

М и с о л и 4. Ададҳои зеринро муқоиса мекунем:

а) $\log_4 5$ ва $\log_4 7$; б) $\log_{\frac{1}{4}} 5$ ва $\log_{\frac{1}{4}} 7$; в) $\log_2 9$ ва $\log_3 15$.

Ҳ а л. а) функсияи логарифмии асосаш аз 1 калон дар тамоми хати рост афзуншаванда мебошад. Азбаски $7 > 5$ аст, пас $\log_4 7 > \log_4 5$ мебошад.

б) дар ҳолати мазкур асоси логарифм аз 1 хурд аст. Бинобар ин, функсияи $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ камшаванда мебошад. Пас, $\log_{\frac{1}{4}} 7 < \log_{\frac{1}{4}} 5$.

в) мебинем, ки $9 > 8 = 2^3$ аст. Аз ҳамин сабаб $\log_2 9 > \log_2 2^3$ ё $\log_2 9 > 3$ мебошад. Аз тарафи дигар, $15 < 27 = 3^3$, пас $\log_3 15 < 3$. Инак, $\log_3 15 < \log_2 9$ мебошад.

Саволҳои барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Таърифи функсияи логарифмиро баён карда, якчанд мисолҳои мушаххаси онро оред.

2. Хосиятҳои функсияи логарифмиро номбар кунед.

3. Хосияти b^0 -и функсияро ҳангоми $0 < a < 1$ ва $x < 1$ будан исбот кунед.

4. Исботи хосияти 7^0 -ро ҳангоми $0 < a < 1$ будан оред.

5. Оё графики функцияи логарифмӣ каниш дошта метавонад?

6. Чаро графики функцияи логарифмӣ тири абсиссаро намебурад?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

183. Хосиятҳои функцияи зеринро номбар кунед ва графикашро созед:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; в) $y = \log_4 x$; г) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Соҳаи муайянии ифодаро ёбед (184-186):

184. а) $\log_{\pi}(3-2x)$; б) $\log_4(16-x^2)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(-\sqrt{x}+3)$; г) $\log_7(1-2x)$.

185. а) $\log_{0,8} \frac{4x-2}{5x+7}$; б) $\log_{\sqrt{2}}(3-2x-x^2)$;

в) $\log_{2,5} \frac{x-1}{2-3x}$; г) $\log_3(-x+x^2)$.

186. а) $\log_{\frac{1}{2}} \sin x$; б) $\log_4(2^x-1)$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} \cos x$; г) $\lg(1-5^x)$.

Ададҳоро муқоиса кунед (187-188):

187. а) $\log_3 5$ ва $\log_3 7$; б) $\log_{\frac{2}{3}} 12$ ва $\log_{\frac{2}{3}} 15$;

в) $\log_8 \frac{5}{7}$ ва $\log_8 \frac{3}{7}$; г) $\log_{0,6} \frac{6}{11}$ ва $\log_{0,6} \frac{8}{11}$.

188. а) $\log_2 12$ ва $\log_5 30$; б) $\log_3 2$ ва $\log_4 0,2$;

в) $\log_3 5$ ва $\log_7 4$; г) $\log_3 10$ ва $\log_7 46$;

д) $\log_7 3$ ва $\log_5 9$; е) $\log_{11} 7$ ва $\log_{13} 19$.

189. Адади зеринро бо як муқоиса кунед:

а) $\log_{\pi} 3,1$; б) $\log_6 8,2$; в) $\lg 2,9$; г) $\log_{0,2} 0,7$.

190. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\log_2(2\sin\frac{\pi}{12}) + \log_2 \cos\frac{\pi}{12}$; б) $\log_3(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}) + \log_3(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16})$;

в) $\lg \operatorname{tg} 10 + \lg \operatorname{ctg} 10$; г) $\log_{\pi}(5 + 2\sqrt{6}) + \log_{\pi}(5 - 2\sqrt{6})$.

191. Аз баробарӣ x -ро ёбед:

а) $\log_2 x = 2\log_4 6 - \log_4 18$; б) $\log_3 x = \log_2 6 - 2\log_2 4\sqrt{6}$;

в) $\log_5 x = \frac{1}{2}\log_3 144 + \log_3 0,75$; г) $\log_{\pi} x = 2\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4$.

192. Қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ -ро дар порчаи $\left[\frac{1}{16}; 2\right]$;

б) $f(x) = \log_2 x$ -ро дар порчаи $[1; 4]$

ёбед.

Машиқҳо барои такрор

193*. Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x+\sqrt{x^2-4}-2} = 6.$$

194*. Нобаробариро ҳал кунед:

$$\frac{1}{x-1} > \frac{2}{2-x}.$$

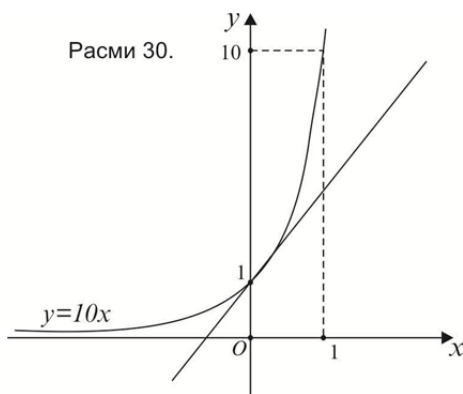
195. Миқдори китобҳо дар як раф нисбат ба дигараш 2 маротиба кам аст. Агар аз рафи якум 6 китобро гирем ва дар

рафи дуҷум 8 китоб монем, он гоҳ адади китобҳо дар рафи якум нисбат ба рафи дуҷум 7 бор кам мешавад. Дар ҳар як раф чанд китоб ҳаст?

196. Ҳосилаи функсияи $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ -ро ёбед.

197. HKY - хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 18 ва 14-ро ёбед.

17. АДАДИ e . ЛОГАРИФМИ НАТУРАЛӢ



Функсияи $y = 10^x$ -ро дида мебароем. Ин функсия афзуншаванда буда, графикаи он хати қачи яклухт аст (расми 30). Аз афзуншавии функсия бармеояд, ки агар вай ҳосила дошта бошад, пас ҳосилаи он барои ҳамаи

қиматҳои аргумент адади мусбат аст.

Фарзияи зеринро, ки исботаш оянда (дар банди 21) оварда мешавад, бе исбот қабул мекунем: *функсияи 10^x дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ҳосилаи мусбат дорад*. Ҳосилаи ин функсияро дар нуқтаи $x = 0$ бо $\frac{1}{M}$ ишорат мекунем.

Тавре медонем, ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 ададест, ки ба он нисбати

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ҳангоми ба нул майл кардани Δx майл мекунад. Ҳамин тариқ,

$$\frac{10^{0+\Delta x} - 10^0}{\Delta x} = \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{M} \quad \text{ҳангоми } \Delta x \rightarrow 0.$$

Ҳисоб карда шудааст, ки қимати тақрибии адади доимии M зерин аст: $M = 0,4343\dots$

Т а ъ р и ф и 1. Адади 10^M адади e номида мешавад.

Ҳамин тариқ, $e = 10^M$. Аз ин ҷо $M = \lg e$. Исбот карда шудааст, ки адади e адади ирратсионалӣ мебошад. Яъне, онро дар намуди касри даҳии даврии беохир ё дар намуди $\frac{m}{n}$, ки m адади бутун ва n -натуралӣ мебошад, тасвир кардан мумкин нест. Дар замони мо бо ёрии компютерҳо зиёда аз дуним ҳазор рақами даҳии адади e ёфта шудааст. Аввалин рақамҳои ин адад чунинанд:

$$e = 2,718281828459045\dots$$

Ҳангоми ҳисоббарориҳо (вобаста ба саҳеҳии зарурии натиҷа) $e = 2,72$ ё $e = 2,718$ ва ё $e = 2,7183$ қабул мекунамд.

Функсияи нишондиҳандагии асосаш e -ро, яъне $y = e^x$ -ро баъзан *экспонента* ҳам мегӯянд.

Э з о ҳ. Таърифи аниқи адади e чунин аст: e ададест, ки ба он ифодаи $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ҳангоми ба беохир майл кардани n майл мекунад. Исботи ин тасдиқ аз доираи математикаи мактабӣ берун аст.

Адади e мусбат ва ба 1 баробар нест. Барои ҳамин логарифмҳо аз рӯи асоси e муайян мебошанд.

Т а ъ р и ф и 2. Логарифми асосаш e логарифми натуралӣ номида мешавад.

Ин логарифм бо $\ln$ ишорат карда мешавад, яъне $\ln b = \log_e b$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Фарзияро, ки бо истифодаи он адади e дохил карда шудааст, баён кунед.

2. Чӣ гуна логарифмро натуралӣ меноманд ва онро чӣ тавр ишорат мекунанд?

3. Таърифи аниқи адади e - ро баён кунед.

4. Адади e чӣ гуна адад аст ва он ба чанд баробар мебошад?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

198. Тақрибан ҳисоб кунед (бо саҳеҳии 10^{-3}):

а) e^2 ; б) $\frac{1}{e}$; в) $\sqrt{e}$; г) $\frac{1}{e^2}$.

199. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\ln e^2$; б) $\ln e^{-3}$; в) $e^{\ln 4}$; г) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$.

200. Ҳисоб кунед:

а) $\frac{2\ln 3}{\ln 45 - \ln 5} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 32}$; б) $\frac{\ln 8 - \ln 4}{\ln 8 + \ln 4} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 81 - \ln 9}$.

201. Ададхоро муқоиса кунед:

а) $\ln \frac{1}{3}$ ва $\ln \frac{1}{2}$; б) $\ln 7$ ва $\ln 19$;

$$\text{в)} -\lg 0,1 \quad \text{ва} \quad 1; \qquad \text{г)} -\lg 11 \quad \text{ва} \quad -1.$$

202. Муодиларо ҳал кунед:

$$\text{а)} e^{-2x+1} = 1; \qquad \text{б)} e^{x^2-2x} = \frac{1}{e};$$

$$\text{в)} e^{\sqrt{x}-2} = \sqrt{e}; \qquad \text{г)} e^{x^3-x-4} = -1.$$

203. Нобаробариро ҳал кунед:

$$\text{а)} e^{3x-5} \geq 1; \qquad \text{б)} e^{-x+4} < 1;$$

$$\text{в)} e^{2x} + e^x \leq 2; \qquad \text{г)} e^x - 2e^{-x} > -1.$$

204*. Нишон диҳед, ки логарифми натуралии адад тақрибан 2,3 маротиба аз логарифми даҳии ҳамин адад зиёд аст.

Машқҳо барои тақрор

205. КТУ- калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 18 ва 12-ро ёбед.

206. Ҳисоб кунед: $\sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}.$

207. Ифодаро сода кунед: $\frac{\frac{a^2+b^2}{-2b}-2b}{\frac{a}{b}-1}.$

208. Муодилаи $\cos(1-2x) = -\frac{1}{2}$ -ро ҳал кунед.

209. Ҳалли нобаробарии зеринро ёбед:

$$\left[\left(\frac{3}{7} \right)^{\frac{1}{x^2}} \right]^{x^2-2x} \geq 1.$$

§6. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМӢ

18. МУОДИЛАИ ЛОГАРИФМӢ

Муодилаи логарифмӣ гуфта муодилаеро меноманд, ки он дар тахти аломати логарифм тағйирёбанда дорад. Муодилаи одитарини логарифмӣ муодилаи

$$\log_a x = b$$

аст. Аз хосиятҳои функсияи логарифмӣ (ниг. ба банди 16) ё бевосита аз таърифи логарифм бармеояд, ки ин муодила барои ҳар гуна адади ҳақиқии b ҳал дорад ва ҳаллаш ягона аст. Ин ҳал бо формулаи $x = a^b$ ифода меёбад, яъне бо амали потенсиронӣ ёфта мешавад.

Э з о ҳ. Дар бандҳои пешина, аниқаш дар бандҳои 14-16 мо аллакай бо муодилаи одитарини логарифмӣ вохӯрда будем, вале бе истифодаи истилоҳи муодилаи логарифмӣ (ниг., масалан, ба машқҳои 154-156, 172-173 ва 191, ё ба исботи хосияти 2^0 -и функсияи логарифмӣ дар банди 16).

Барои ҳал кардани муодилаи логарифмии нисбатан мураккаб бо истифодаи хосиятҳои логарифм (ниг. ба банди 15) табдилоти айниятӣ гузаронидан лозим меояд. Ин имконият медиҳад, ки аз муодилаи мураккаби логарифмӣ ба муодилаи алгебравии бароямон муқаррарӣ гузарем. Дар айни ҳол ин гузариш боиси васеъ шудани соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбанда шуда метавонад. Ин васеъшавӣ ба он оварда мерасонад, ки баъзе аз решаҳои ёфташуда, решаҳои муодилаи аввала нестанд. Барои ҳамин, ҳангоми ҳалли муодила ҳатман бояд ё соҳаи имконпазири тағйирёбандаи муодила дар ҳар қадами табдилдиҳӣ ба эътибор гирифта шавад, ё бо гузаронидани санҷиш муайян карда шавад, ки решаҳои ёфташудаи муодилаи муқаррарӣ решаҳои муодилаи аввалаанд ё не.

Табдилдиҳиҳо имконият медиҳанд, ки муодилаи аввала ба яке аз намудҳои:

$$\text{а) } \log_a f(x) = b; \quad \text{б) } \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

оварда шавад. Дар ҳолати а) маҷмӯи қиматҳои имконпазири x бо нобаробарии $f(x) > 0$ муайян шуда, муодила дар ин маҷмӯъ ба муодилаи $f(x) = a^b$ баробарқувва аст. Мувофиқан, дар мавриди б) маҷмӯи қиматҳои имконпазир бо системаи нобаробариҳои $f(x) > 0$ ва $g(x) > 0$ муайян мешавад. Муодила дар ин маҷмӯъ ба муодилаи $f(x) = g(x)$ баробарқувва аст.

Дар поён ин гуфтаҳоро бо ҳалли муодилаҳои мушаххас равшан мекунем.

М и с о л и 1. Муодилаи $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Ҷамъи логарифмҳоро дар қисми чап дар намуди ҳосили зарб тасвир карда, муодилаи

$$\log_2[(x+1)(x-1)] = 3 \quad \text{ё ин ки} \quad \log_2(x^2 - 1) = 3$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи логарифм $x^2 - 1 = 8$. Қиматҳои $x_1 = -3$ ва $x_2 = 3$ решаҳои ин муодилаанд. Вале ҳангоми $x = -3$ будан тарафи чапи муодила маъно надорад, чунки барои чунин қимат ҳам $x+1 < 0$ ва ҳам $x-1 < 0$ аст. Пас адади $x = -3$ решаи муодилаи квадратӣ буда, решаи муодилаи аввала нест.

Ҷ а в о б: 3.

М и с о л и 2. Решаҳои муодилаи

$$\log_x(x^2 - 3x + 3) = 1$$

-ро меёбем.

Ҳ а л. Қисми чапи муодила маъно дорад, агар $x > 0$, $x \neq 1$ (x асоси логарифм аст) ва $x^2 - 3x + 3 > 0$ бошад. Аз таърифи логарифм бевосита

$$x^2 - 3x + 3 = x$$

бармеояд. Аз ин чо $x^2 - 4x + 3 = 0$. Ададҳои 1 ва 3 решаҳои ин муодилаи квадратиянд. Вале $x = 1$ решаи муодилаи аввала нест. Ҳангоми $x = 3$ будан $x^2 - 3x + 3 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 3 = 3 > 0$ аст. Пас, танҳо адади 3 ҳалли муодила аст.

Ҷ а в о б: 3.

М и с о л и 3. Муодилаи

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Ҳанӯз дар банди 11 (ниг. ба тарзи ҳалли мисоли 4) қайд карда будем, ки агар функсияи номаълумдор дар муодила дар дараҷаҳои гуногун ояд, муодиларо бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал кардан мумкин аст. Дар муодилаи мазкур $\log_2 x$ чунин функсия мебошад. $t = \log_2 x$ ишорат карда, ба ҷойи муодилаи аввала муодилаи

$$t^2 - t - 2 = 0$$

-ро ҳосил мекунем. Ададҳои $t_1 = -1$ ва $t_2 = 2$ решаҳои ин муодилаанд. Акнун қиматҳои матлуби x -ро меёбем:

$$t_1 = \log_2 x = -1, \quad x_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2};$$

$$t_2 = \log_2 x = 2, \quad x_2 = 2^2 = 4.$$

Ҳар ду қимати ёфташуда муодиларо қаноат мекунонанд, чунки соҳаи қиматҳои имконпазири ифодаи тарафи чапи муодила ададҳои мусбат аст.

Ҷ а в о б: $\frac{1}{2}$; 4.

М и с о л и 4. Муодилаи $\log_{0,6} x + 4 \log_{\frac{5}{3}} x = 3$ -ро ҳал

мекунем.

Ҳ а л. Дар ҷамъшавандаи дуҷум ба логарифми асосаш 0,6 мегузарем. Барои ин формулаи гузаришро истифода мекунем

(ниг. ба хулосаи 2-и банди 15):

$$\log_{\frac{5}{3}} x = \frac{\log_{0,6} x}{\log_{0,6} \frac{5}{3}}.$$

$$\text{Азбаски } \log_{0,6} \frac{5}{3} = \log_{\frac{3}{5}} \frac{5}{3} = \log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5} \right)^{-1} = -\log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{5} = -1 \text{ аст,}$$

пас $\log_{\frac{5}{3}} x = -\log_{0,6} x$. Акнун муодилаи додашуда намуди

$-3\log_{0,6} x = 3$ ё $\log_{0,6} x = -1$ -ро мегирад. Аз ин ҷо

$$x = (0,6)^{-1} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Ҷ а в о б: $1\frac{2}{3}$.

М и с о л и 5. Муодилаи $\log_2(x+1) + \log_{x+1} 2 = 2,5$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Аз формулаи $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ истифода карда,

ҳосил мекунем:

$$\log_2(x+1) + \frac{1}{\log_2(x+1)} = \frac{5}{2} \text{ ё } 2\log_2^2(x+1) - 5\log_2(x+1) + 2 = 0.$$

Гузориши $\log_2(x+1) = y$ моро ба муодилаи $2y^2 - 5y + 2 = 0$ меорад. Қиматҳои $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{2}$ решаҳои ин муодилаанд. Акнун ба номаълуми аввала бармегардем:

$$\log_2(x+1) = 2; \quad x+1 = 2^2; \quad x = 3;$$

$$\log_2(x+1) = \frac{1}{2}; \quad x+1 = 2^{\frac{1}{2}}; \quad x = \sqrt{2} - 1.$$

Бо осонӣ мебинем, ки қиматҳои ёфташудаи x ҳалли муодилаанд.

Ҷ а в о б: $3; \sqrt{2} - 1$.

М и с о л и 6. Решаи муодилаи $3^{7-2x} = 5$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Хотирнишон мекунем, ки ин муодила ба ҳамон гурӯҳи муодилаҳо дохил мешавад, ки дар бораашон дар эзоҳи 2-и банди 11 сухан ронда будем.

Аз ҳар ду тарафи муодила аз рӯйи асоси 3 логарифм гирифта, ҳосил мекунем:

$$\log_3 3^{7-2x} = \log_3 5 \quad \text{ё} \quad 7 - 2x = \log_3 5.$$

Инак, $x = 3,5 - \frac{1}{2} \log_3 5$ аст.

Қайд мекунем, ки ин намуд муодилаҳои нишондиҳандагиро, ки танҳо бо истифодаи таърифи логарифм ҳал мешаванд, ҳанӯз дар банди 14 дида баромадан мумкин буд.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Баробариҳоеро, ки хосиятҳои асосии логарифмро ифода мекунанд, нависед.

2. Муодилаи одитарини логарифмиро нависед ва гӯед, ки барои чӣ онро одитарин меноманд?

3. Чаро муодилаи одитарини логарифмӣ танҳо якто реша дорад?

4. Бо мисолҳо фаҳмонед, ки ҳангоми табдилдиҳии айнияти ифодаи логарифмӣ соҳаи муайянии ифодаи ҳосилшаванда васеътар буданаш мумкин аст.

5. Раванди ҳалли муодилаи логарифмиро шарҳ диҳед.

6. Муодилаи логарифмие тартиб диҳед, ки он бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал карда шавад.

Машқҳо баъри мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Муодиларо ҳал кунед (210-219):

210. а) $8^x = 0,4$; б) $(0,2)^x = 4$; в) $3^x = 7$; г) $9^x = e$.

211. а) $(0,3)^{x-1} = 2$; б) $4^{x^2} = 5$; в) $10^{2x} = 6$; г) $e^{2-5x} = 2$.

212. а) $\log_3 x = 2$; б) $\log_{0,2} x = -1$; в) $\lg x = -\frac{1}{2}$; г) $\ln x = 2$.

213. а) $\log_3(2x-1) = 2$; б) $\ln(x^2+2x+4) = \ln 7$;
в) $\ln(4-x) = 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) = 1$.

214. а) $\log_a x = \log_a 4 - 2\log_a 5$; б) $\lg x + \lg(9x+10) = 3$;
в) $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 2$; г) $\lg(3x-2) + \lg 25 = 3$.

215. а) $\frac{\log_2 x + 1}{\log_2(4x-15)} = 2$; б) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$;

в) $\frac{\lg x - 5}{2} + \frac{13 - \lg x}{3} = 2$; г) $\ln(16-6x) = 2\ln x$.

216. а) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$; б) $\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$;
в) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$; г) $\ln(x^2-6x+9) = \ln 3 + \ln(x+3)$.

217. а) $\log_{x-1}(x^2-5x+7) = 1$; б) $\log_x(x^2+7x-1) = 2$;
в) $\log_7[46 + \log_3(x-5)] = 2$; г) $\log_2[\log_5(4-x) + 6] = 3$.

218. а) $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 4 + \log_{\frac{1}{a}} 5$; б) $\log_9 x + \log_3 x = 3$;

в) $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 5$; г) $\log_x 2 - \log_4 x = -\frac{1}{2}$.

219. а) $\log_3(10-3^x) = 2-x$; б) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x-4$;

в) $x^{\lg x - 1} = 100$; г) $x^{1-\frac{\lg x}{3}} = \sqrt[3]{100}$.

Машиқҳо барои такрор

220. Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{x+2} + 2^x = 5^x - 5^{x-1}.$$

221. Ифодаро сода кунед:

$$\left(\frac{1}{5}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2} \cdot (ab^5)^{-1}.$$

222. Масофаи байни ду шаҳр 720 км аст. Ду қатора ба пешвози ҳамдигар ҳаракат карда, дар миёнаҷойи роҳ бо ҳамдигар вохӯрданд. Маълум аст, ки қаторайи дуюм 1 соат пас аз қаторайи якум ба роҳ баромада, 4 км/соат тезтар роҳ тай мекард. Суръати ҳар як қатораро ёбед.

223. 0,1% -и адади $(2 - 1\frac{1}{4})$: 0,25 -ро ёбед.

224. Нуқтаҳои критикии функсияи $f(x) = x^4 - 3x^3$ -ро ёбед.

19. НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМӢ

Нобаробариеро, ки тағйирёбанда дар он дар таҳти аломати логарифм аст, *нобаробариҳои логарифмӣ* меноманд. Ҳангоми ҳалли чунин нобаробариҳо аз хосияти афзуншавӣ ё камшавии (монотонии) функсияи логарифмӣ истифода мекунам:

а) ҳангоми $a > 1$ будан: агар $0 < x < 1$ бошад, он гоҳ $\log_a x < \log_a 1$ аст, яъне $\log_a x < 0$; агар $x > 1$ бошад, он гоҳ $\log_a x > \log_a 1$, яъне $\log_a x > 0$.

б) ҳангоми $0 < a < 1$ будан: агар $0 < x < 1$ бошад, он гоҳ $\log_a x > 0$ аст; агар $x > 1$ бошад, он гоҳ $\log_a x < 0$ аст.

Мисоли 1. Нобаробариҳои

$$\log_3(2x+1) < \log_3 5$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Асоси логарифм $a = 3 > 0$ аст. Пас ҳангоми ҷой доштани нобаробарии мазкур нобаробарии

$$2x + 1 < 5$$

ҷой дорад. $x < 2$ ҳалли ин нобаробарӣ аст. Вале тағйирёбандаи x бояд чунин бошад, ки ифодаҳои дар нобаробарӣ буда маъно дошта бошанд. Қисми чапи нобаробарии мазкур маъно дорад, агар $2x + 1 > 0$ ё $x > -\frac{1}{2}$ бошад.

Инак, ҳалли нобаробарӣ фосилаи $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ аст.

М и с о л и 2. Ҳалли нобаробарии

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x) > -1$$

-ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $\frac{1}{3} < 1$ аст, пас ҳангоми ҷой доштани

нобаробарии мазкур ҳатман нобаробарии $x^2 + 2x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

ҷой дорад. Инчунин, барои маъно доштани ифодаи тарафи чапи нобаробарӣ зарур аст, ки $x^2 + 2x > 0$ бошад. Ҳамин тариқ, нобаробарии додашуда ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases}$$

баробарқувва аст. Фосилаи $(-3; 1)$ ҳалли нобаробарии $x^2 + 2x - 3 < 0$, фосилаҳои $(-\infty; -2)$ ва $(0; \infty)$ ҳалли нобаробарии $x^2 + 2x > 0$ мебошанд. Қисми умумии ин фосилаҳо фосилаҳои $(-3; -2)$ ва $(0; 1)$ мебошанд.

Инак, фосилаҳои $(-3; -2)$ ва $(0; 1)$ ҳалли нобаробарии додашудаанд.

М и с о л и 3. Нобаробарии $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(2x-6) \geq -2$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Қисми чапи нобаробарии додашуда маъно дорад, агар $\begin{cases} x+1 > 0, \\ 2x-6 > 0 \end{cases}$ ё $\begin{cases} x > -1, \\ x > 3 \end{cases}$ ва ё $x > 3$ бошад. Дар ин соҳа нобаробарию ҳал мекунем:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x-6} \geq -2; \quad \frac{x+1}{2x-6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2};$$

$$\frac{x+1}{2x-6} \leq 4; \quad \frac{-7x+25}{2x-6} \leq 0.$$

Бо усули фосилаҳо меёбем, ки нимфосилаи $(3; \frac{25}{7}]$ ҳалли нобаробарии охирин аст ва соҳаи $x > 3$ онро дар бар мегирад.

Ҷ а в о б: $(3; \frac{25}{7}]$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна нобаробарию нобаробарии логарифмӣ меноманд?
2. Ҳангоми ҳалли нобаробарии логарифмӣ аз чӣ истифода мебаранд?
3. Раванди ҳалли нобаробарии логарифмиро вобаста ба асоси логарифм шарҳ диҳед.
4. Моҳияти усули фосилаҳоро дар мисоли нобаробарии мушаххас баён кунед.

Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Нобаробарию ҳал кунед (225-230).

225. а) $\log_2 x > 1$; б) $\log_{\frac{1}{4}} x < 2$; в) $\log_{0,6} x < 1$; г) $\log_{2,5} x > 2$.

$$226. \text{ а) } \log_3(x-2) < 2; \quad \text{ б) } \log_{\frac{1}{2}}(2-3x) > -1;$$

$$\text{ в) } \log_5(3x-1) > 2; \quad \text{ г) } \log_{\frac{1}{6}}(7x+1) < -2.$$

$$227. \text{ а) } \lg(2x-3) > \lg(x+1);$$

$$\text{ б) } \lg(2x-4) \geq \lg(x+1);$$

$$\text{ в) } \log_2(4x-3) \leq \log_2(3x-4);$$

$$\text{ г) } \log_{0,3}(2x+7) < \log_{0,3}(4x-1).$$

$$228. \text{ а) } \log_{\pi}(x+1) + \log_{\pi} x < \log_{\pi} 2;$$

$$\text{ б) } \ln x + \ln(x-1) \leq \ln 6;$$

$$\text{ в) } \log_2(x^2 - x - 12) < 3;$$

$$\text{ г) } \log_{\frac{1}{2}}(8-x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2).$$

$$229. \text{ а) } \ln^2 x - \ln x \leq 0;$$

$$\text{ б) } \log_{\frac{1}{5}}^2 x - 3 > 0;$$

$$\text{ в) } \lg^2 x + 3\lg x > 4;$$

$$\text{ г) } \log_3^2 x - 25 \leq 0.$$

$$230^*. \text{ а) } \log_2 \cos x < -\frac{1}{2};$$

$$\text{ б) } |2 - \ln x| \leq 1;$$

$$\text{ в) } \log_{\frac{1}{2}} \sin 2x > 1;$$

$$\text{ г) } |3\lg x - 1| < 2.$$

Машиқҳо барои такрор

$$231. \text{ Муодилаи } 2\sin^2 x = 5\cos x + 2 \text{ -ро ҳал кунед.}$$

$$232. \text{ Муодиларо ҳал кунед: } \log_2(5^x + 3) + \log_2(5^x - 3) = 4.$$

233. Фосилаҳои афзуншавию камшавӣ ва нуқтаҳои экстремуми функсияи $y = -x^2 + 6x - 8$ -ро ёбед.

$$234. \text{ Сода кунед: } \frac{27 - 27a + 9a^2 - a^3}{a^2 - 6a + 9}.$$

235. Комбайн 4 соат кор карду баъд ба он комбайни дуюм

ҳамроҳ шуд. Ҳар ду пас аз ин даравро дар 8 соат ба охир расониданд. Ҳар як комбайн дар алоҳидагӣ даравро дар чанд соат ба охир мерасонд, агар маълум бошад, ки барои ин комбайни дуюм бояд 8 соат зиёд дарав мекард.

20. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМӢ ВА ОМЕХТА

Барои ҳал кардани системаи муодилаҳои логарифмӣ тарзи маъмули ёфтани ҳалли муодилаҳои логарифмиро истифода карда, системаи муодилаҳои алгебравии муқаррариро ҳосил мекунанд. Ин системаро ҳал карда, аз байни онҳо ҳалли системаи муодилаҳои логарифмиро ҷудо менамоянд.

Усули умумии ҳалли системаҳои омехта (системаҳое, ки дар таркиби худ ғайри муодилаи логарифмӣ боз муодилаҳои намуди дигарро, масалан, муодилаҳои хаттӣ, квадратӣ, иррационалӣ, нишондиҳандагӣ ва ғайраро доранд) низ аз ҳосил кардани системаи муқаррарии алгебравӣ иборат аст.

М и с о л и 1. Системаи

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2(xy) = 3 \end{cases} \quad \text{-ро ҳал мекунем.}$$

Ҳ а л. Муодилаи якуми системаро дар намуди $\log_2 \frac{x}{y} = 1$

навишта, меёбем: $\frac{x}{y} = 2$ ё $x = 2y$. Аз муодилаи дуюм дорем:

$xy = 2^3 = 8$. Дар ин ҷо $x = 2y$ гузошта, ҳосил мекунем: $y = \pm 2$ аст. Аз $x = 2y$ бармеояд, ки $x = \pm 4$. Вале қисми чапи система маъно дорад, агар $x > 0$ ва $y > 0$ бошад. Бо назардошти ин ҳалро меёбем.

Ҷ а в о б: (4; 2).

Э з о ҳ. Системаи

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x}{y} = 1, \\ \log_2(xy) = 3 \end{cases}$$

ду ҳал дорад: (4; 2) ва (-4; -2). Инро маънидод кунед.

М и с о л и 2. Системаи зеринро ҳал менамоем:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2. \end{cases}$$

Ҳ а л. Аз $512 = 2^9$ ва $1 + \lg 2 = \lg 10 + \lg 2 = \lg(10 \cdot 2) = \lg 20$ истифода карда, системаи

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Агар $\sqrt{x} = u$ ва $\sqrt{y} = g$ гузорем, он гоҳ системаи

$$\begin{cases} u + g = 9, \\ u \cdot g = 20 \end{cases}$$

-ро доро мешавем. Дар муодилаи дуҷуми ин система $u = 9 - g$ гузошта, муодилаи квадратии $g^2 - 9g + 20 = 0$ -ро соҳиб мешавем. Решаҳои он

$$g_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}, \quad g_1 = 4, \quad g_2 = 5$$

мебошанд. Аз $u = 9 - g$ бармеояд: $u_1 = 5$, $u_2 = 4$. Вале $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = g$ ё $x = u^2$, $y = g^2$ аст. Пас, (25; 16) ва (16; 25) ҳалҳои системаи аввалаанд.

М и с о л и 3. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} xy = -1, \\ \log_{x+y} \sqrt{x^2 + y^2} = 2. \end{cases}$$

Ҳа л. Муодилаи дуҷусти системаро ҷунин менависем:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= (x + y)^2; \quad x^2 + 2xy + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Муодилаи якуми системаро истифода карда, ишораи $\sqrt{x^2 + y^2} = t$ - ро дохил намуда, пайдо мекунем:

$$t^2 - t - 2 = 0; \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9;$$

$$t = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad t_1 = -1; \quad t_2 = 2.$$

Решаи якум ношоҷам аст, чунки $t > 0$ бояд бошад. Пас,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 2; \quad x^2 + y^2 = 4; \quad (x + y)^2 - 2xy = 4; \\ (x + y)^2 + 2 &= 4; \quad (x + y)^2 = 2; \quad x + y = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Азбаски $x + y > 0$ аст (ҳамчун асоси логарифм), пас

танҳо як системаи алгебравии $\begin{cases} x + y = \sqrt{2}, \\ xy = -1 \end{cases}$ - ро ҳосил

мекунем. Ҷуфти ададҳои $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)$ ва

$\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$ ҳалли ин системаанд. Бо осонӣ мебинем, ки

онҳо ҳалли системаи аввала низ мебошанд.

$$\text{Ҷ а в о б: } \left(\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} \mp \sqrt{6}}{2}\right).$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Кадом тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои алгебравиро медонед?

2. Чӣ гуна системаи муодилаҳоро системаи муодилаҳои логарифмӣ меноманд?

3. Системаи муодилаҳои омехта гуфта, чӣ гуна системаҳоро дар назар доранд?

4. Раванди ҳалли системаи муодилаҳои логарифмиро баён кунед.

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводи назариявӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (236-238):

236. а)

б)

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{9}}(x+y) = -2, \\ \log_5(x-y) = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$$

в)

г)

$$\begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(y-x) = \lg 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

237. а)

б)

$$\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 80, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2; \end{cases}$$

в)

г)

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 15 - 1, \\ 10^{\lg(3x+2y)} = 39. \end{cases}$$

238. а)

$$\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0; \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0; \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} \log_4(x + y) = 0, \\ (x + 14)(x + y) = 64. \end{cases}$$

Машқҳо барои такрор

239. Ифодаро сода кунед:

$$\left(\frac{a}{5+a} + \frac{5+a}{5-a} \right) : \frac{3a+5}{a+5}.$$

240. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 2x + 9 \geq 6x - 5, \\ -\frac{x}{2} < -1. \end{cases}$$

241. Велосипедрон аз шаҳри А ба шаҳри Б, ки масофаи байнашон 45 км аст равон шуд. Пас аз 30 дақиқа аз паси ӯ велосипедрони дигар ба роҳ баромад. Вай ба шаҳри Б 15 дақиқа тезтар омада расид. Суръати велосипедрони аввала чанд аст, агар маълум бошад, ки суръати вай нисбат ба суръати дигарӣ 3 км/соат кам аст?

242*. Муодиларо ҳал кунед: $16^{\log_x 2} = 8x$.

243. Айниятро исбот кунед: $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

§7. ҲОСИЛА ВА ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИЮ ЛОГАРИФМӢ ВА ДАРАҶАӢ

21. ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Дар банди 17 Ҳангоми дохил кардани мафҳуми логарифми натуралӣ фарз када будем, ки нисбати афзоиши функсияи $y = 10^x$ бар афзоиши аргумент дар нуқтаи $x = 0$ Ҳангоми ба нул майл кардани афзоиши аргумент ба $\frac{1}{M}$ майл мекунад, яъне

$$\frac{10^{0+\Delta x} - 10^0}{\Delta x} = \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{M}, \text{ Ҳангоми } \Delta x \rightarrow 0. \quad (3)$$

Инчунин қайд карда будем, ки $M = 0,4343\dots$ аст.

Ин фарзия ба тасдиқи дар нуқтаи $x = 0$ ҳосила доштани функсияи $y = 10^x$ ва ба $\frac{1}{M}$ баробар будани он баробарқувва аст. Фарзияро истифода карда, ҳосилаи функсияи нишондиҳандагии $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)-ро меёбем. Барои ин аввал ҳосилаи функсияи $y = 10^x$ -ро дар нуқтаи дилхоҳ ҳисоб мекунем. Нисбати афзоиши ин функсия бар афзоиши аргумент

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} = 10^x \cdot \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

аст ва Ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ мувофиқи (3) он ба $\frac{1}{M} \cdot 10^x$ майл мекунад. Аз ин мулоҳизаҳо ва аз таърифи ҳосила бармеояд, ки

$$(10^x)' = \frac{1}{M} \cdot 10^x.$$

Барои асоси дилхоҳи $a > 0, a \neq 1$ мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ (ниг. ба банди 14)

$$a^x = 10^{\ell ga^x} = 10^{x \ell ga}.$$

Пас, мувофиқи қоидаи дифференциронии функцияи мураккаб

$$(a^x)' = (10^{\ell ga^x})' = \frac{1}{M} \cdot 10^{x \ell ga} \cdot (x \ell ga)' = \frac{\ell ga}{M} \cdot 10^{x \ell ga} = \frac{\ell ga}{M} a^x.$$

Азбаски $10^M = e$ (ниг. ба таърифи 1-и банди 16) аст, пас $M = \ell ge$. Аз рӯи формулаи гузариш $\frac{\ell ga}{M} = \frac{\ell ga}{\ell ge} = \log_e a = \ln a$, бинобар ин

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (4)$$

Т е о р е м а и 1. Функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ дар ҳар як нуқтаи тири ададӣ ҳосила дорад ва ҳосилаи он бо формулаи (4) ифода карда мешавад.

Х у л о с а. Функцияи нишондиҳандагӣ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ бефосила аст, яъне ҳангоми $x \rightarrow x_0$ $a^x \rightarrow a^{x_0}$.

Ин хулоса аз дифференциалпазир будани функция ва аз лемма оид ба бефосилагии ҳар гуна функцияи ҳосиладошта бармеояд.

Ҳосилаи функцияи $y = e^x$ -ро бевосита аз (4) ҳангоми $a = e$ будан ҳосил каран мумкин аст. Азбаски $\ell ne = 1$ аст, пас

$$(e^x)' = e^x. \quad (5)$$

Яъне, ҳосилаи экспонента e^x ба ҳудаш баробар аст. Бар замми ин нишон додан мумкин аст, ки ҳар гуна функцияе, ки ҳосилааш ба ҳудаш баробар буда, дар нуқтаи $x = 0$ ин ҳосила ба 1 баробар аст, экспонента мебошад.

М и с о л и 1. Ҳосилаи функсияҳои $y = 10^x$ ва $y = 3^{-5x}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Аз рӯйи формулаи (4) дорем:

$$(10^x)' = 10^x \ln 10; \quad (3^{-5x})' = 3^{-5x} \ln 3 \cdot (-5x)' = -5 \cdot 3^{-5x} \ln 3.$$

М и с о л и 2. Ҳосилаи функсияи $y = e^{2x}$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Мувофиқи қоидаи ҳосилаи функсияи мураккаб ва формулаи (5) ҳосил мекунем: $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$.

М и с о л и 3. Функсияи $f(x) = (x-1)e^x$ -ро оид ба афзуншавӣ (камшавӣ) ва экстремум тадқиқ мекунем.

Ҳ а л. Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x) = [(x-1)e^x]' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x.$$

Азбаски барои ҳар гуна қимати x , $e^x > 0$ аст, пас аломати ҳосила бо аломати x яхела аст. Яъне, дар фосилаи $(0; \infty)$ $f'(x) > 0$ буда функсия меафзояд. Дар фосилаи $(-\infty; 0)$ $f'(x) < 0$ аст, бинобар ин дар ин фосила функсия камшаванда аст. Дар атрофи нуқтаи $x = 0$ ҳосила аломаташро аз минус ба плюс иваз мекунад, яъне ин нуқта нуқтаи минимум аст: $f_{\min} = f(0) = -1$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Фарзияро, ки аз он истифода карда ҳосилаи функсияи нишондиҳандагӣ ёфта шудааст, баён кунед.

2. Теорема дар бораи мавҷудияти ҳосилаи функсияи нишондиҳандагиро оред.

3. Чаро функсияи нишондиҳандагӣ барои ҳар гуна қимати аргументаш бефосила аст?

4. Ҳосилаи экспонента ба чӣ баробар аст ва он чӣ тавр ҳосил карда мешавад?

5. Қоидаи ёфтани фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ба ёд оред.

6. Муодилаи расанда ба графики функсияи $y = e^x$ дар нуқтаи абсиссааш x_0 чӣ намуд дорад?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Ҳосилаи функсияро ёбед (244-246):

244. а) $y = 2e^x + 3$; б) $y = 3x + 5e^{-x}$;

в) $y = 1 - \frac{1}{3}e^x$; г) $y = 5e^{-x} + x^2$.

245. а) $y = e^x \sin x$; б) $y = 2e^x + 3x$;

в) $y = 4x^2 - 4^x$; г) $y = x^2 \cdot 3^x$.

246*. а) $y = e^{x^2} \cos \frac{x}{2}$; б) $y = 6^{\frac{x}{2}} \cdot \lg 4x$;

в) $y = \frac{2^x}{1 + 2^{-x}}$; г) $y = \frac{0,2^{-x}}{x + 1}$.

247. Дар нуқтаи абсиссааш x_0 муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ нависед:

а) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = 3^{-x}$, $x_0 = 1$.

248. Функсияро оид ба афзуншавӣ (камшавӣ) ва экстремумҳо тадқиқ кунед:

а) $f(x) = xe^{3x}$; б) $f(x) = x^2 \cdot 4^{-x}$;

в) $f(x) = xe^{-x}$; г) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$.

Машқҳо барои такрор

249. Қимати x -ро ёбед: $\frac{2\frac{1}{3}-1}{4-x:7,5} = 3$.

250. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \frac{1+x}{5} - \frac{2x-y}{2} = 3y-1, \\ \frac{5y-2}{2} + \frac{4x-5}{6} = 8-2x. \end{cases}$$

251. Ҳисоб кунед: $\left(7 \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} - 5 \cdot \sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2$.

252. Исбот кунед, ки $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$ аст (a - адади дилхоҳ).

253. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$8^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$$

22. ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИХАНДАГӢ

Дар ин банд ба ҳосил кардани функцияи ибтидоӣ барои функцияи нишондиҳандагӣ машғул мешавем.

Т е о р е м а и 2. Функцияи $\frac{a^x}{\ln a}$ барои функцияи

$y = a^x$ дар тирӣ ададии $R = (-\infty; \infty)$ функцияи ибтидоӣ аст.

Дар ҳақиқат, $\ln a$ адади доимӣ аст, барои ҳамин мувофиқи формулаи (4) барои ҳар гуна қимати x

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x.$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки функсияи $\frac{a^x}{\ln a}$ барои a^x функсияи ибтидоӣ аст.

Ҳамин тариқ, мувофиқи теоремаи банди 2 намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $y = a^x$ чунин аст:

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

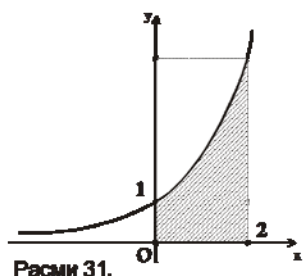
ки дар ин ҷо C доимии дилхоҳ мебошад.

Э з о х. Аз баробарии (5): $(e^x)' = e^x$ бармеояд, ки функсияи $e^x + C$ намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи e^x аст.

М и с о л и 1. Функсияи ибтидоии функсияи зеринро меёбем:

а) $f(x) = 3^x$; б) $g(x) = 4 \cdot 2^x$; в) $h(x) = 2e^{5x} - 10 \cdot 0,7^x$.

Ҳ а л. Аз теоремаи 2 ва қоидаҳои ёфтани функсияи ибтидоӣ истифода мекунем:



а) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C;$

б) $G(x) = 4 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+2}}{\ln 2} + C;$

в) $H(x) = \frac{2e^{5x}}{5} - 10 \cdot \frac{0,7^x}{\ln 0,7} + C.$

М и с о л и 2. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = 4^x$, $y = 0$,

$x = 0$ ва $x = 2$ маҳдудро меёбем.

Ҳа л. Графикхоро схемавӣ кашида, мебинем, ки фигураи додашуда трапетсияи қатъаттаи дар расми 31 тасвир кардашуда мебошад. Бинобар ин, S - масоҳати онро аз рӯи формулаи масоҳати трапетсияи қатъатта меёбем:

$$S = \int_0^2 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} \Big|_0^2 = \frac{16}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} = \frac{15}{\ln 4}.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Барои функсияи нишондиҳандагӣ кадом функсия, функсияи ибтидоӣ мебошад?

2. Намуди умумии функсияи ибтидоӣ барои экспонента чӣ гуна аст?

3. Соҳаи муайянии функсияи ибтидоии функсияи нишондиҳандагӣ кадом аст?

4. Оё ғайри экспонента функсияи дигареро нишон дода метавонед, ки функсияи ибтидоиаш ба худаш баробар бошад?

Машиқҳо барои мустақкам кардани маводди назариявӣ

254. Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_0^1 0,5 e^x dx$; б) $\int_0^1 e^{3x} dx$; в) $\int_2^4 2^x dx$; $\int_{0,5}^2 4^x dx$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ёбед (255-256):

255. а) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

б) $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$;

в) $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

г) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

256. а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2$, $x = 0$;

б) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$;

в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $x = -1$, $y = 1$;

г) $y = e^{4x}$, $x = 1$, $y = 1$.

Машқҳо барои такрор

257. Муодиларо ҳал кунед: $\sin 3x \cos 3x = -\frac{1}{4}$.

258. Чор адад, ки се тараф ва периметри секунҷаро ифода мекунанд, прогрессияи арифметикиро ташкил карда метавонанд?

259. Бригадаи каргарон бояд дар муҳлати муайян 260 детал тайёр мекард. Ҳар рӯз аз миқдори зарурӣ 6 деталӣ зиёд истеҳсол карда, бригада се рӯз пеш аз муҳлат супоришро иҷро намуд. Бригада чанд рӯз кор кардааст? Агар бригада супоришро барзиёд иҷро намекард, вай бояд ҳар рӯз чанд деталӣ истеҳсол менамуд?

260. Соҳае, ки дар ҳамворӣ бо нобаробарии зерин муайян мешавад, тасвир кунед:

а) $x^2 + y^2 \leq 9$; б) $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

261. Ҳисоб кунед: $2\frac{3}{7} - 3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} \cdot 2$.

262. Аз ифода аз рӯи асоси дилхоҳ логарифм гиред:

а) $\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{2ab}$; б) $\left(\frac{2}{3}c^{\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

23. ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ

Ҳосилаи функсияи логарифми натуралии $y = \ln x$ -ро меёбем. Исбот мекунем, ки барои дилхоҳ x -и калон аз нул формулаи

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (6)$$

дуруст аст. Мувофиқи айनियाи асосии логарифмӣ барои ҳар гуна $x > 0$ навишта метавонем: $x = e^{\ln x}$. Пас, ҳангоми $x > 0$ будан ҳосилаҳои функсияҳои $y = x$ ва $y = e^{\ln x}$ ба ҳам баробаранд, яъне

$$(x)' = (e^{\ln x})' \quad (7)$$

аст. Маълум, ки $(x)' = 1$. Ҳосилаи $e^{\ln x}$ -ро аз рӯи қоидаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб ва формулаи (5)-и банди 21 ҳисоб мекунем:

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'.$$

Ҳамин тариқ, аз ин ҷо ва аз (7) бармеояд, ки $1 = x(\ln x)'$. Ниҳоят, аз ин ҷо баробарии (6) ҳосил мешавад.

Инак, функсияи логарифми натуралӣ дар $R_+ = (0; \infty)$ дорои ҳосила буда, ҳосилааш бо формулаи (6) ҳисоб карда мешавад. Ин функсия дар R_+ ҳамчун функсияи дифференциалпазир бефосила аст.

Э з о ҳ и 1. Ҳосилаи функсияи $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ аз рӯи формулаи

$$(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (8)$$

ҳисоб карда мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи гузариш $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Аз ин ҷо $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Э з о ҳ и 2. Функцияи $F(x) = x(\ln x - 1) + C$ барои функцияи $y = \ln x$ функцияи ибтидоӣ мебошад (тарзи ҳосил кардани $F(x)$ аз доираи математикаи мактабӣ берун аст). Дар ҳақиқат,

$$\begin{aligned} F'(x) &= [x(\ln x - 1) + C]' = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' + C' = \\ &= \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x. \end{aligned}$$

Мувофиқан намуди умумии функцияҳои ибидоии функцияи $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ чунин аст:

$$F(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C.$$

М и с о л и 1. Ҳосилаи функцияи зеринро меёбем:

а) $y = \ln(4 + 3x)$; б) $y = \log_3(x^2 + 1)$.

Ҳ а л. Мувофиқи формулаҳои (6) ва (8), инчунин қоидаҳои ҳосилагирӣ дорем:

$$\text{а) } y' = [\ln(4 + 3x)]' = \frac{1}{4 + 3x} \cdot (4 + 3x)' = \frac{3}{4 + 3x};$$

$$\text{б) } y' = [\log_3(x^2 + 1)]' = \frac{1}{(x^2 + 1)\ln 3} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln 3}.$$

М и с о л и 2. Муодилаи расандаро ба графики функцияи $f(x) = \ln x + 3$ дар нуқтаи абсиссааш $x_0 = 1$ менависем.

Ҳ а л. Тавре медонем, муодилаи расанда дар нуқтаи $x = a$ ба графики функцияи $y = f(x)$ намуди зеринро дорад:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\text{Дорем: } f'(x) = (\ln x + 3)' = \frac{1}{x}, \quad \text{пас } f'(1) = 1, \quad \text{инчунин}$$

$f(1) = \ln 1 + 3 = 3$. Ҳамин тариқ, муодилаи расандаи матлуб

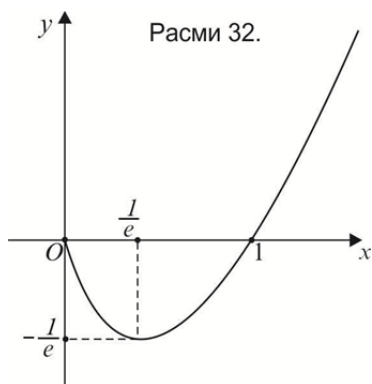
$$y - 3 = x - 1 \quad \text{ё} \quad y - x - 2 = 0$$

аст.

М и с о л и 3. Функцияи $f(x) = x \ln x$ -ро оид ба афзуншавӣ, камшавӣ ва экстремум тадқиқ намуда, графикашро схемавӣ месозем.

Ҳ а л. Функцияи додашуда ҳангоми $x > 0$ будан муайян аст. Ҳосиларо меёбем:

$$f'(x) = \ln x + 1.$$



Нобаробарии $f'(x) > 0$ ё $\ln x + 1 > 0$

ҳангоми $x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ будан ҷой

дорад. Яъне, дар $\left(\frac{1}{e}; \infty\right)$ функция

меафзояд. Дар $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ ҳосила

манфӣ аст, бинобар ин дар ин

фосила функция кам мешавад. Пас, нуктаи $x_0 = \frac{1}{e}$ нуктаи

минимум аст:

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} (\ln 1 - \ln e) = \frac{1}{e} (0 - 1) = -\frac{1}{e}.$$

Графикро схемавӣ аз баробариҳои $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

ва $f(1) = 0$ истифода карда, мекашем (расми 32).

Саволҳо барои назорати дониши назариявии ҳонандагон

1. Формулае, ки бо он ҳосилаи функцияи логарифмӣ ифода мешавад, чӣ намуд дорад?

2. Чаро функцияи логарифмӣ дар маҷмӯи R_+ бефосила аст?

3. Намуди умумии функцияи ибтидоии функцияҳои $y = \ln x$ ва $y = \log_a x$ чӣ гуна аст?

4. Оё графики функцияи логарифмӣ бо графики функцияи ҳосилаи он якхела аст?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Ҳосилаи функцияро ёбед (263-265):

263. а) $y = \ln(2 + 5x)$; б) $y = \log_{0,2}(x + 4)$;

в) $y = \lg x - \sin x$; г) $y = \log_3(2x + 1)$.

264. а) $y = x + \ln x$; б) $y = x^2 \ln x$;

в) $y = \frac{\ln x}{x}$; г) $y = \frac{x}{\ln x}$.

265. а) $y = \frac{\ln(x+3)}{x^2+1}$; б) $y = \frac{x}{\ln(1-x)}$;

в) $y = \frac{x^2}{\ln 3x}$; г) $y = \frac{\log_4 x}{x+1}$.

266. Муодилаи расандаро ба графики функцияи $f(x)$ дар нуқтаи абсиссааш x_0 нависед:

а) $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 2\ln x + 1$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = 3\ln x$, $x_0 = \frac{1}{e}$; г) $f(x) = \log_2(x+1)$, $x_0 = 0$.

267. Функцияи зеринро оид ба афзуншавӣ, камшавӣ ва экстремум тадқиқ кунед:

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x} \ln x;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{в) } f(x) = x - \ln x;$$

$$\text{г) } f(x) = x^2 \ln x.$$

Машиқҳо барои такрор

268. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, ёбед.

269. Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед:

$$2^{x^2+x-0,5} = 2\sqrt{2}.$$

270. Ҳосилаи функсияи $y = 3^{\lg x}$ -ро ёбед.

271. Ифодаи

$$\frac{x - 9x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{1}{2}}}$$

-ро сода кунед.

272. Фарқи ду адад ба 5 баробар буда, ҳосили зарби онҳо 84 аст. Ин ададҳоро ёбед.

24. ҲОСИЛА ВА ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯИ ДАРАҶАГҲ

Ҳосила ва функсияи ибтидоии функсияи дараҷагии $y = x^\alpha$ -ро ҳангоми ратсионалӣ будани α медонем (масалан, ниг. ба чадвали функсияҳои ибтидоӣ, ки дар банди 3 омадааст). Онҳоро беисбот оварда, дар ҳалли чандин масъалаҳо истифода кардаем (ниг. ба мисоли 7-и банди 4.).

Акнун дараҷаи α -ро адади дилхоҳи ҳақиқӣ ҳисоб карда,

формулаҳои ҳосила ва намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи дараҷагиро комилан исбот мекунем.

I. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ дар $R_+ = (0; \infty)$ бо формулаи

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (9)$$

ифода карда мешавад.

Дар ҳақиқат, азбаски мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ $e^{\ell nx} = x$ ($x > 0$) аст, пас $x^\alpha = (e^{\ell nx})^\alpha = e^{\alpha \ell nx}$. Аз ин ҷо

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ell nx})' = e^{\alpha \ell nx} \cdot (\alpha \ell nx)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Формулаи (9) исбот шуд. Формула нишон медиҳад, ки ҳосилаи функсияи дараҷагӣ низ функсияи дараҷагӣ аст.

М и с о л и 1. Ҳосилаи функсияи:

$$\text{а) } y = \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2}; \quad \text{б) } y = x^{-\sqrt{10}}$$

-ро меёбем.

Ҳ а л. Мувофиқи формулаи (9) дорем:

$$\text{а) } y' = \left[\left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2} \right]' = \ell n 2 \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2-1} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{\ell n 2}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2-1};$$

$$\text{б) } y' = \left(x^{-\sqrt{10}}\right)' = -\sqrt{10} x^{-\sqrt{10}-1} = -\frac{\sqrt{10}}{x^{1+\sqrt{10}}}.$$

II. Ба ёфтани намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи дараҷагӣ шурӯъ мекунем. Ду ҳолатро дида мебароем.

А) $\alpha \neq -1$. Барои ин ҳолат функсияҳои матлуб бо формулаи

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ифода мешаванд.

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи (9) дорем:

$$F'(x) = \frac{1}{\alpha+1} (x^{\alpha+1})' + C' = \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha}.$$

Б) $\alpha = -1$. Формулаи (6) нишон медиҳад, ки барои функсияи $y = \frac{1}{x}$ дар фосилаи $(0; \infty)$ намуди умумии функсияи ибтидоӣ $\ln x + C$ аст.

Функсияи $\frac{1}{x}$ дар фосилаи $(-\infty; 0)$ низ функсияи ибтидоӣ дорад, ки ин функсияи $\ln(-x)$ мебошад. Дар ҳақиқат,

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Ҳамин тарик, намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои $y = \frac{1}{x}$ ҳангоми $x > 0$ будан $\ln x + C$ ва ҳангоми $x < 0$ будан $\ln(-x) + C$ аст. Таърифи қимати мутлақро барои ифодаи x истифода карда, ба хулоса меоем, ки ҳангоми $x \neq 0$ будан намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $\frac{1}{x}$ чунин аст:

$$F(x) = \ln|x| + C.$$

М и с о л и 2. Функсияи ибтидоиро барои функсияи $y = \frac{1}{2x+3}$ меёбем (Дар назар дошта мешавад, ки соҳаи муайянии ин функсия фосилаест, ки он нуқтаи $x = -\frac{3}{2}$ -ро

дарбар намегирад.).

Ҳа л. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки барои ҳар гуна нуқтаи фосилаи муайяни ва барои адади дилхоҳи C функцияи

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$$

функцияи ибтидоӣ аст.

Умуман, барои функцияи $y = \frac{1}{ax+b}$ функцияи

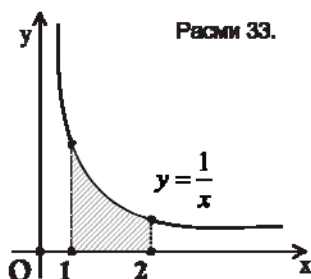
$$F(x) = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

функцияи

Рисми 33.

ибтидоӣ мебошад, агар $x \neq -\frac{b}{a}$

бошад.



Мисоли 3. Масоҳати фигураи

бо хатҳои $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ ва $x = 2$ маҳдудро меёбем (расми 33).

Ҳа л. Аз рӯи формулаи масоҳати трапетсияи қачхатта меёбем:

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Дар кадом ҳолат функцияи дараҷагӣ меафзояд?
2. Фосилаи камшавандагии функцияи дараҷагӣ кадом аст?
3. Ҳосилаи функцияи дараҷагӣ аз рӯи кадом формула ёфта мешавад?

4. Формулаи функсияи ибтидоии функсияи дараҷагӣ чӣ намуд дорад?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

Ҳосилаи функсияро ёбед (273-274):

273. а) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; б) $y = x^{\sqrt{6}}$; в) $y = x^{\frac{4}{5}}$; г) $y = x^{-\sqrt{7}}$.

274. а) $y = x^{-e}$; б) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\ell n 4}$; в) $y = (3x)^{\ell n 2}$; г) $y = x^{\pi}$.

Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияро ёбед (275-276):

275. а) $y = \frac{1}{2}x^{\sqrt{2}}$; б) $y = x^{3\sqrt{2}}$; в) $y = x^e$; г) $y = -\frac{1}{5}x^{-\sqrt{5}}$.

276. а) $y = \frac{2}{x+3}$; б) $y = \frac{1}{x+1}$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+4}$.

277. Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx$; б) $\int_1^2 \frac{2dx}{x^{\frac{1}{2}}}$; в) $\int_0^1 6x^{\frac{1}{5}} dx$; г) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (278-279):

278. а) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = 0$, $x = 1$;

б) $y = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$;

в) $y = x^{0.4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$;

$$\text{г) } y = x^{-0,2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 32.$$

$$279. \text{ а) } y = \frac{2}{x} + 1, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4;$$

$$\text{б) } y = -\frac{3}{x}, \quad y = 0, \quad x = -3, \quad x = -1;$$

$$\text{в) } y = \frac{1}{2x}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{4}, \quad x = 2;$$

$$\text{г) } y = 4 - \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = -4, \quad x = -2.$$

Машқҳо барои такрор

280. Соҳаи муайянии функсияи $y = \ln(x^2 + x + 6)$ -ро ёбед.

281. Қимати x -ро ёбед: $\log_3 x = \frac{1}{2} \log_3 16 + 3 \log_3 0,5$.

282. Барои 4 қалам ва 3 дафтар 70 дирам ва барои 2 қаламу 1 дафтар 28 дирам доданд. Қалам ва дафтар чанд дирамӣ меистанд?

283. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x) = x + \frac{1}{x}$ -ро дар порчаи $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ ёбед.

284. Нишон диҳед, ки $\frac{\sin 15^\circ + \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ - \cos 75^\circ} = \sqrt{3}$ аст.

25. МАҲҶУМИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНЦИАЛӢ

То ҳол ба муоинаи муодилаҳое машғул будем, ки ҳаллашон адад буд. Акнун муодилаҳоеро дида мебароем, ки ҳалли онҳо функсия аст. Агар чунин муодила ғайри худи

функсия боз ҳосилаи функсияи матлубро доро бошад, он гоҳ онро муодилаи *дифференциалӣ* меноманд.

Ҳалли бисёр масъалаҳои илм ва техника ба ёфтани ҳалли муодилаи дифференциалии

$$f'(x) = kf(x), \quad (10)$$

ки дар он k адади доимӣ буда, $y = f(x)$ функсияи матлуб аст, оварда мешаванд. Маънои муодилаи (баробарии) (10) ин аст, ки суръати тағйирёбии функсия дар нуқтаи x ба қимати функсия дар ҳамин нуқта мутаносиб мебошад.

Барои тасдиқи ин гуфтаҳо равандҳои зерини воқеиро ҳамчун мисол дида мебароем.

Мисоли 1 (Тачзияи радиоактивӣ). Амалан муқаррар карда шудааст, ки суръати таҷзияи радиоактивии модда бо мурури вақт t ба миқдори модда $m(t)$ мутаносиб аст, яъне

$$m'(t) = b m(t).$$

Дар ин ҷо b коэффитсиенти мутаносибӣ буда, шиддатнокии таҷзияро муайян менамояд. Ҳангоми таҷзия миқдори модда кам мешавад. Бо ибораи дигар, функсияи $m(t)$ камшаванда аст, яъне $m'(t) \leq 0$. Бо мақсади бо параметри мусбат сару кор доштан, $b = -\alpha > 0$ гузошта, вобастагиро дар намуди

$$m'(t) = -\alpha m(t) \quad (11)$$

менависанд.

Мисоли 2 (Афзоиши аҳоли). Ҳангоми омӯзиши афзоиши аҳолии ин ё он мамлакат фарз мекунанд, ки суръати афзоиши аҳоли ба миқдори аҳоли мутаносиб аст. Агар дар лаҳзаи вақти t миқдори аҳолиро бо $N(t)$ ишорат кунем, он гоҳ

$$N'(t) = \beta N(t), \quad (12)$$

ки $\beta > 0$ буда, шиддатнокии афзоиши аҳолиро ифода мекунад.

Мисоли 3 (Қонуни тағйирёбии фишори атмосферӣ).

Дар ҳудуди баландиҳои аз сатҳи баҳр яхсела, ки дар онҳо ҳарорати ҳаво амалан доимӣ аст, суръати камшавии фишори атмосферӣ ба ҳуди фишор мутаносиб аст. Яъне, агар бо $P(h)$ фишорро дар баландии h ишорат кунем, он гоҳ

$$P'(h) = -\gamma P(h), \quad (13)$$

ки дар ин ҷо $\gamma > 0$ мебошад.

Муодилаҳои (11)-(13) муодилаҳои дифференсиалӣ буда, намуди (10)-ро доранд. Дар онҳо бузургҳои мусбат α , β ва γ коэффитсиентҳои мутаносибӣ, функсияҳои $m(t)$, $N(t)$, $P(h)$ - матлубанд.

Акнун ба муодилаи (10) бармегардем. Дар он k адади маълум буда, функсияи $f(x)$ номаълум аст. Формулаи ҳосилаи функсияи нишондиҳандагиро ба хотир оварда (ниг. ба банди 21) мебинем, ки барои ҳар гуна адади C функсияи намуди

$$f(x) = Ce^{kx} \quad (14)$$

ҳалли муодилаи (10) аст. Дар ҳақиқат,

$$f'(x) = C(e^{kx})' = Cke^{kx} = kf(x).$$

Нишон медиҳем, ки муодилаи (10) ғайр аз функсияҳои намуди (14) ҳалҳои дигар надорад. Барои ин функсияи $f(x)$ -ро, ки ҳалли дилхоҳи (10) аст, гирифта функсияи ёрирасони

$$g(x) = f(x)e^{-kx}$$

-ро тартиб медиҳем. Дорем:

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

Дар ин ҷо ба ҷои $f'(x)$ қиматаш $kf(x)$ -ро аз муодилаи (10) гузошта, ҳосил мекунем:

$$g'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

Аз айнан нул будани ҳосилаи $g(x)$ бармеояд, ки вай барои тамоми қиматҳои x доимӣ аст (ниг. ба леммаи банди 2): $g(x) = C$. Акнун баробарии $g(x) = f(x)e^{-kx}$ -ро истифода карда, пайдо мекунем:

$$f(x)e^{-kx} = C \quad \text{ва аз ин ҷо} \quad f(x) = Ce^{kx}.$$

Инак, ҳар гуна ҳалли (10) намуди (14)-ро дорад. Бо ибораи дигар, ҳалли *умумии* муодилаи (10) бо формулаи (14) ифода карда мешавад (Ҳалли умумии муодила гуфта, ҳаллери меноманд, ки аз он ҳалли дилхоҳи мушаххасро чудо кардан мумкин аст.).

Намуди умумии ҳалли муодилаи (10) (формулаи (14)) нишон медиҳад, ки вай аз як параметри доимии C вобаста аст. Ин ба хулоса меорад, ки ҳангоми дода шудани қимати ҳал дар як нуқтаи $x = x_0$, яъне дода шудани $f(x_0)$, ҳалли (10) якқимата муайян мегардад. Шарти $f(x_0) = f_0$ шарти *аввала* ё *ибтидоӣ* номида мешавад. Ҳангоми дода шудани f_0 функсияи

$$f(x) = f_0 e^{k(x-x_0)} \quad (15)$$

ҳалли (10) буда, шарти $f(x_0) = f_0$ -ро қаноат мекунонад. Дурустии ин тасдиқ бевосита санчида мешавад.

Ба муоинаи равандохе, ки онҳоро дар боло бо муодилаи дифференциалӣ ифода кардем, бармегардем. Ҳалли муодила-хоро ёфта, қиматҳои ададии коэффитсиентҳоро ҳосил мекунем.

Таҷзияи радиоактивӣ. Бигузор дар лаҳзаи қайдшудаи вақти t_0 миқдори модда ба m_0 баробар аст, яъне $m(t_0) = m_0$. Барои муайяни $t_0 = 0$ қабул карда, ҳалли муодилаи (11)-ро бо шарти ибтидоии $m(0) = m_0$ аз рӯи формулаи (15) меёбем

$$(f_0 = m_0, x_0 = 0):$$

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}.$$

Дар бисёр ҳолатҳо тавсифи моддаи радиоактивӣ *даври нимтаҷзия* T - вақте, ки дар муддати он миқдори модда ду маротиба кам мешавад мебошад. Даври нимтаҷзия барои бисёр моддаҳои радиоактивӣ хеле калон аст. Масалан, барои радий $T = 1590$ сол, барои уран $T = 4,56$ миллиард сол мебошад. Даври нимтаҷзияро доништа, коэффитсиенти мутаносибиро ёфтан мумкин аст. Дар ҳақиқат, аз баробариҳои

$$m_0 = 2m(T) \quad \text{ё} \quad 2 = \frac{m_0}{m(T)} = \frac{m_0}{m_0 e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}$$

баробарии $T = \frac{1}{\alpha} \ln 2$ ё $\alpha = \frac{\ln 2}{T}$ бармеояд. Барои радий

$$\alpha = \frac{\ln 2}{1590} \approx 0,000446 = 4,46 \cdot 10^{-6}.$$

Афзоиши аҳоли. Агар бо $N_0 = N(0)$ миқдори ҳозираи аҳолиро ишорат кунем, он гоҳ пас аз t сол миқдори аҳоли мувофиқи формулаи (15) ба

$$N(t) = N_0 e^{\beta t}$$

баробар мешавад, ки ин функсия ҳалли муодилаи (12) аст. Коэффитсиенти β -ро дар асоси додашудаҳои оморӣ муайян кардан мумкин аст. Масалан, бигузор маълум бошад, ки дар муддати 10 сол миқдори аҳоли 1,2 маротиба афзудааст. Дар ин ҳолат,

$$\frac{N(10)}{N(0)} = 1,2; \quad \frac{N_0 e^{10\beta}}{N_0} = 1,2; \quad e^{10\beta} = 1,2.$$

$$\text{Аз ин ҷо: } 10\beta = \ln 1,2 \quad \text{ва} \quad \beta = \frac{1}{10} \ln 1,2 \approx 0,0182.$$

Ҳамин тариқ, $N(t) = N_0 e^{\frac{\ln 1,2}{10} t} \approx N_0 e^{0,0182t}$. Ин баробарӣ имконият медиҳад, ки миқдори аҳолиро баъди 20 сол ҳисоб кунем ё кай ду маротиба зиёд шудани онро донем ва ғайра.

Қонуни тағйирёбии фишори атмосферӣ. Агар $P_0 = P(h_0)$ бузургии фишор дар баландии $h = h_0$ бошад, он гоҳ ҳалли муодилаи (13) мувофиқи формулаи (15) функсияи

$$P(h) = P_0 e^{-\gamma(h-h_0)}$$

аст, ки он бузургии фишорро дар баландии h ифода менамояд. Агар $h_0 = 0$ гузорем, он гоҳ

$$P(h) = P_0 e^{-\gamma h}.$$

Қимати $P(h)$ -ро дар ягон баландии h_1 дониста, коэффитсиенти мутаносибии γ -ро меёбем:

$$\gamma = \frac{1}{h_1} (\ln P_0 - \ln P(h_1)).$$

Мисолҳои овардашуда ба хулоса меоранд, ки муодилаҳои дифференциалӣ василаи тавоноии тадқиқ мебошанд. Ин аст, ки тадқиқотчиён қонунҳоеро, ки онҳо ба ягон раванд хосанд, бо воситаи чунин муодилаҳо ифода карда, рафти инкишофи ин равандро бо мурури вақт ҳамчун ҳалли ин муодилаҳо меомӯзанд. Масъалаҳои овардашуда мисоли татбиқи математика дар амалия шуда метавонанд.

Қайд мекунем, ки муодилаҳои дифференциалӣ як шохҳои алоҳидаи илми математикаи олиро ташкил медиҳанд.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна муодиларо муодилаи дифференциалӣ мегӯянд?
2. Ҳалли умумии муодилаи дифференциалӣ чист? Вай бо кадом формула ифода меёбад?

3. Мазмуни шарти ибтидой аз чӣ иборат аст?
4. Даври нимтаҷзияи модда чист ва он чӣ тавр муайян карда мешавад?
5. Баробарии (10)-ро нависед ва гӯед, ки он чӣ маъно дорад?
6. Чаро муодилаҳои дифференсиалӣ татбиқи васеи амалӣ дошта метавонанд?

Машиқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

285. Нишон диҳед, ки функсияи $f(x) = 6e^{4x}$ ҳалли муодилаи $f'(x) = 4f(x)$ аст.

286. Нишон диҳед, ки функсияи $y = 2e^{-3x}$ ҳалли муодилаи $y' = -3y$ мебошад.

287. Даври нимтаҷзияи моддаи радиоактивӣ муайян карда шавад, агар маълум бошад, ки дар муддати 2 сол ин модда яқуним маротиба кам шудааст.

288. Баъди як соат аз 50 гр. моддаи радиоактивӣ 47 гр. боқӣ монд. Баъди 5 соат чӣ қадари ин модда боқӣ мемонад?

289. Даври нимтаҷзияи радий 1590 сол аст. баъди чанд сол миқдори радий 10 маротиба кам мешавад?

290. Дар муддати 10 сол аҳолии мамлакат 10% афзудааст. Дар 20 соли пасоянд аҳоли чанд маротиба меафзояд?

291. Дар муддати 15 сол аҳолии ҷумҳурӣ 20% зиёд шудааст. Пас аз чанд сол миқдори аҳоли ду маротиба зиёд мешавад?

292. Аз сатҳи баҳр чӣ қадар баланд баромадан даркор, ки фишори ҳаво 40% кам шавад, агар маълум бошад, ки ҳангоми ба баландии 1000 м баромадан фишор 20% кам мешавад?

Машиқҳо барои такрор

293. Ифодаи $2y - 3y^2 + y^3$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед.

294. Сода кунед: $\cos(\pi - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.

295. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 13 см аст. Катетҳоро ёбед, агар фарқи онҳо 7 см бошад.

296. Муодилаи $\log_4(x^2 - x) = 1 + \log_4 5$ -ро ҳал кунед.

297. Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои $y = x(2 - x)$, $y = 0$ маҳдуд аст, ҳисоб кунед.

Маълумоти таърихӣ

Дар охири асри XVII кори дохил кардани дараҷа дар шакли ҳозира аз тарафи олимони англис *Ҷон Валлис* (1616-1703) ва *Исаак Нютон* (1643-1727) ба субут расонида шудааст. Валлис дар соли 1665 аввалин шуда истифодаи нишондихандаҳои манфӣ ва касриро мувофиқи мақсад ҳисоб карда буд. И.Нютон дар яке аз мактубҳои худ дар соли 1676 навишта буд: «Тавре алгебрадонон ба ҷойи АА, ААА ва ғайра, A^2 , A^3 ва ғайра менависанд, ман ҳам ба ҷои $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ ва ғайра, a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} ва ғайра менависам».

Бо тадриҷ васеъ кардани мафҳуми дараҷа дар илм ҳамин хел буд, ки мафҳумҳои нав — дараҷаҳои нулӣ, касрӣ ва манфӣ ба таърифҳои дараҷа, ки пештар қабул шуда буданд, зиддият надоштанд. Онҳо ба ҳамон қоидаҳое, ки онҳоро дараҷаи натуралӣ қонеъ мекард, итоат менамуданд. Дар охири асри XVII аз сабаби мураккаб гардидани масъалаҳои

математикӣ зарурати таъчилии паҳн кардани таърифи нишондиҳандаи дараҷа барои ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ ба миён омад. Умумӣ кардани дараҷа имконият дод, ки функсияи нишондиҳандагии $y = a^x$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ муоина карда шавад. Назарияи ниҳоят ба ҳозира наздики функсияи нишондиҳандагӣ дар ду боби китоби *Леонард Эйлер* (1707-1783) «Муқаддима ба анализ» дарҷ гардидааст. Вобастагии байни функсияи нишондиҳандагӣ ва функсияҳои тригонометрӣ, ки онро Л.Эйлер дар ин китоб пешниҳод кардааст, яке аз умдатарин натиҷаҳои илми математика аст. Вобастагии мазкурро аз сабаби аз доираи математикаи мактабӣ берун буданаш намеорем.

Калимаи *логарифм* ҷунонӣ буда, чун нисбати ададҳо тарҷума мешавад. Кашфи логарифмҳо (соли 1594), номи онҳо ва аввалин ҷадвали логарифмҳо ба олими шотландӣ *Ҷон Непер* (1550-1617) тааллуқ дорад. Сабаби чунин номгузорӣ он буд, ки логарифмҳо ҳангоми муқоиса кардани ду адад, ки яке узви прогрессияи арифметикӣ ва дигаре узви прогрессияи геометрӣ мебошад, пайдо шудаанд. Соатсоз ва устои асбобҳои нучумӣ, олими швейтсарӣ *Й.Бюрги* (1552-1632), ки ёрдамчии нучумшиносии машҳур *И.Кеплер* (1571-1630) шуда қор мекард, аз Ҷ. Непер пештар ҷадвалҳои логарифмҳоро тартиб дода буд. Вале ҷадвалҳои Бюрги соли 1620 ҷоп шуданд, ҳол он ки ҷадвалҳои Непер соли 1614 ҷоп шуда буданд. Аз ҳамин сабаб, дар кашфи логарифмҳо аввалият ба Непер дода шуааст.

Ғояи кашфи логарифмҳоро асосан математики олмонӣ *М.Штифел* (1487-1567) пешниҳод кардааст. Ӯ фарз карда буд, ки дар баробарии $x = a^y$ паси ҳам y қиматҳои

$$1, 2, 3, 4, \dots, y, y+1 \quad (16)$$

-ро қабул мекунад. Он гоҳ x ин тавр ифода мешавад:

$$1, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots, a^y, a^{y+1}. \quad (17)$$

Ададҳои дар қатори (16) буда прогрессияи арифметикӣ ва ададҳои дар қатори (17) буда прогрессияи геометрияро ташкил медиҳанд. Зоҳиран ҷаҳмат, ки ададҳои дар (16) буда логарифми ададҳои дар (17) буда аз r -и асоси a ҳастанд. Пурсида мешавад, қимати a -ро чанд гирем, то ки ададҳои дар қатори (17) буда ба қадри имкон зич (ду узви ҳамсоя ба ҳам наздик) бошанд. Непер ва Бюрги новобаста ба ҳамдигар, мувофиқан $a = 1 - 10^{-7}$ ва $a = 1 + 10^{-4}$ қабул карда буданд.

И. Бюрги соли 1603 ҳисобкуниҳои худро оғоз карда, соли 1611 онҳоро анҷом дода буд. Вале тавре дар боло қайд шуд, ҷадвалиҳои y аз сабаби дер ҷоп шуданашон ба эътирофи ҳамагон сазовор нагаштанд. Баръакс, ҷадвалиҳои Непер, ки пештар дарҷ гардида буданд, қабули ҳамагон гашта, васеъ истифода шуданд.

Логарифми асосаш e -ро математики англис *Снейдел* дохил кардааст. Соли 1620 вай ҷадвали логарифмҳои натуралии ададҳои аз 1 то 1000-ро ҷоп карда буд. Ҷадвали ба таври кофӣ пурраи логарифмҳои натурали танҳо соли 1770 пайдо шудааст.

Ҷадвалиҳои логарифмии Непер заҳмати ҳисоббарорро хеле сабук карда бошанд ҳам, онҳо мукамал набуданд. Бинобар ин вай ҳамроҳи дӯст ва ҳамкори худ *Г. Бриггс* (1561-1630) ба тартиб додани ҷадвали логарифмҳои даҳӣ

машғул шуд. Баъди Ғавти Непер, Бриггс соли 1624 ҷадвали логарифмҳои даҳии ҷоррақамаро нашр кард, ки логарифмҳои ададҳои бутуни аз 1 то 2000-ро дарбар мегирифт.

Заҳмати ҷандинсолаи риёзидонҳои забардаст беҳуда нарафт. Онҳо кори ҳисоббароронро ҳазорҳо маротиба осон карда буданд. Бояд гуфт, ки ҳаҷми кори ҳисоббарорӣ маҳз дар асри XVII ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногуни ба амалия алоқаманд, дар навбати аввал масъалаҳои амалии илми нучум, аз ҷумла муайян кардани мавқеи киштиҳо аз рӯи ситораҳо ва Офтоб, хеле афзуда буд. Кашф шудани логарифмҳо, ки зарб ва тақсими ададҳоро ба ҷамъ ва тарҳи логарифмҳои онҳо меоваранд, ба гуфти *Лаплас* (1749-1827) умри ҳисоббароронро дароз кард.

Ҷадвали логарифмҳо ва хаткашаки логарифмӣ, ки онро *У. Отред* (1575-1660) ихтироъ карда буд, зиёда аз 350 сол ҳамчун воситаи бозғатимоди ҳисоббарорихои тақрибӣ хизмат карданд ва ба сатҳи баланди инкишофи илм ва прогресси техникӣ расидани инсоният кӯмак расониданд. Вале пайдоиши компютерҳо, ки онҳо суръати ҳисоббарориро миллионҳо маротиба зиёд кардаанд, махсусан пас аз ихтирои микрокалькуляторҳо, ҳоло амалан ҷадвалҳои логарифмӣ қимати худро ҳамчун василаи ҳисоббарорӣ гум кардаанд.

Логарифмҳои натуралӣ (табӣӣ) на танҳо аҳамияти амалӣ, балки аҳамияти назариявӣ низ доштанд ва ҳоло ҳам доранд. Дартар маълум шуд, ки қаторҳоро истифода карда, бо саҳеҳии дилхоҳ қимати тақрибии бузургҳои гуногунро ёфтан мумкин аст. Инчунин, нишон дода шуд, ки дуузвай

дараҷагӣ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ки ба сифати асоси логарифми натуралӣ гирифта мешавад, ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ба адади муайян майл мекунад. Маҳз ин адад, адади e аст. Бо истифодаи қатори ададӣ нишон дода шуд, ки $e = 2,718281183\dots$ аст. *И.Ламберт* (1728-1777) соли 1766 аз вобастагии байни функсияи нишондиҳандагӣ ва функсияҳои тригонометрии *Л.Эйлер*, ки мо роҷеъ ба он дар аввали банд сухан ронда будем, истифода карда исбот намуд, ки ададҳои π ва e иррационалианд.

Авҷи инкишофи анализи математикӣ ба асри XVII рост меояд. Дар ин қор ададҳои π ва e нақши махсусро мебозанд, чунки онҳо дар формулаҳои гуногун дохил мешаванд. Логарифмҳои асосашон e имконият медиҳанд, ки вобастагии гуногуни математикиро, ки онҳо равандҳои гуногуни табиат ва илмро тавсиф менамоянд, бо воситаи чунин логарифмҳо ифода шаванд (ниг. ба банди 25). Аҷаб нест, ки сабаби натуралӣ, яъне табиӣ номгузорӣ кардани ин логарифмҳо дар ҳамин бошад. Истилоҳи «логарифмҳои натуралӣ»-ро *П.Менголи* (1626-1686) соли 1659 дохил карда буд. Баъди вай соли 1668 аз ин истилоҳ *Н.Меркатор* (1620-1687) истифода кардааст. Таърифи ҳозиразамони логарифми натуралиро дар қорҳои *Л. Эйлер* пайдо кардан мумкин аст.

Ба шарафи y ададе, ки ба он $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ҳангоми ба беохир майл кардани n майл мекунад, бо ҳарфи e ишорат карда, худӣ ададро ба шарафи Непер «адади неперӣ» меноманд.

МАШҚҲОИ ИЛОВАҒӢ ДОИР БА БОБИ 2

Ба параграфи 3

298. Графики функцияро созед:

а) $y = 6^x$; б) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$; в) $y = 8^x$; г) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$.

299. Кадоме аз ин ду адад калон аст:

а) $3^{0,4}$ ё $3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ ё $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;
в) $1,4^{-\sqrt{7}}$ ё $1,4^{\sqrt{5}}$; г) $0,2^{-\pi}$ ё $0,2^{-3}$?

Ба параграфи 4

Муодиларо ҳал кунед (300-301):

300. а) $16^x = 2^{\frac{1}{7}}$; б) $3^{x+1} + 3^{x+2} = 36$;
в) $4^{x-2} = 5^{x-2}$; г) $7^{2x+3} = \frac{1}{49}$.
301. а) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 18$; б) $e^x - 1 = \frac{6}{e^x}$;
в) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; г) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Нобаробарихоро ҳал кунед (302 - 303):

302. а) $5^{x-1} > 25$; б) $6^{2x} < \frac{1}{6}$;
в) $0,5^{2x+3} \leq 1$; г) $0,7^{4x+3} \geq 0,49$.
303. а) $0,2^{2-x^2} < 5$; б) $2^{2x^2-x} > 1$;

$$\text{в)} 0,1^x - 0,1^{2x} \leq 0; \quad \text{г)} \pi^{2x} - \pi^x \geq 0.$$

304. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 2^{x-2y} = \frac{1}{4}, \\ 2x + y = 1; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 4^{3x-4y} = 0,25, \\ 4^{x+2y} = 64; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} 3^{2x+y} = 1, \\ xy = -1; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases} \end{array}$$

Ба параграфи 5

305. Ҳисоб кунед:

$$\text{а)} \log_3 9\sqrt{3}; \quad \text{б)} \log_{0,2} 125; \quad \text{в)} \lg 0,01; \quad \text{г)} \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}.$$

306. Айнияти асосии логарифмро истифода карда, қимати ифодаро ёбед:

$$\text{а)} 2^{3+\log_2 5}; \quad \text{б)} \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\log_3 2}; \quad \text{в)} 5^{-1+\log_5 2}; \quad \text{г)} 0,1^{1+\log_{0,1} 3}.$$

307. Аз ифода аз рӯи асоси a логарифм гиред ($b>0, c>0$):

$$\begin{array}{lll} \text{а)} 9b^4 \sqrt[5]{c} & \text{ҳангоми} & a=3 \quad \text{будан;} \\ \text{б)} \frac{c^5}{\sqrt[3]{100b^2}} & \text{ҳангоми} & a=10 \quad \text{будан;} \\ \text{в)} \frac{0,25\sqrt{b}}{c^3} & \text{ҳангоми} & a=5 \quad \text{будан;} \\ \text{г)} \frac{0,16b^2}{c^4 \sqrt{c}} & \text{ҳангоми} & a=0,4 \quad \text{будан.} \end{array}$$

308. Аз баробарии зерин x -ро ёбед:

$$\text{а)} \log_7 x = \log_7 196 - 2\log_7 2;$$

$$\text{б) } \log_4 x = 2\log_4 3 + \frac{1}{2}\log_4 49;$$

$$\text{в) } \lg x = 1 + 3\lg 4 - 2\lg 6;$$

$$\text{г) } \log_{0,3} x = \log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10.$$

309. Графики функцияро созед:

$$\text{а) } y = \log_5 x; \quad \text{б) } y = \log_{0,5} x.$$

310. Соҳаи муайянии функцияро ёбед:

$$\text{а) } y = \log_7(3x-1); \quad \text{б) } y = \log_\pi(7-x);$$

$$\text{в) } y = \log_{0,4}(9-x^2); \quad \text{г) } y = \log_3(6+x-x^2).$$

311. Кадоме аз ададҳои зерин калон аст:

$$\text{а) } \lg 8 \quad \text{ё} \quad 2\lg 3; \quad \text{б) } \log_{\frac{1}{4}} 3 \quad \text{ё} \quad \log_{\frac{1}{4}} 7;$$

$$\text{в) } \log_3 5 \quad \text{ё} \quad \log_7 4; \quad \text{г) } \log_{0,3} 2 \quad \text{ё} \quad \log_5 3?$$

Ба параграфи 6

Муодиларо ҳал кунед (312-315):

$$\text{312. а) } 2^x = 5; \quad \text{б) } 0,3^{x+1} = 0,2; \quad \text{в) } 4^{x+1} = 5^x; \quad \text{г) } 3^{x-1} = 6^{x+2}.$$

$$\text{313. а) } \log_6(2x-1) = 2; \quad \text{б) } \ln(3x-5) = 0;$$

$$\text{в) } \log_{\sqrt{2}}(5x-1) = 2; \quad \text{г) } \log_3(7x-2) = 1.$$

$$\text{314. а) } \log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0; \quad \text{б) } 2\log_{0,5} x = \log_{0,5}(2x^2 - x);$$

$$\text{в) } \log_4(x^2 - x) = 1 + \log_4 5; \quad \text{г) } \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 3) = -2.$$

$$\text{315. а) } \log_x 4 = 2; \quad \text{б) } \log_x(6-x^2) = 1;$$

$$\text{в) } \log_2(1,5-2^x) = x-1; \quad \text{г) } \sqrt{x}^{\lg \sqrt{x}} = 10.$$

Нобаробариро ҳал кунед (316-317):

316. а) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \leq 3$;

б) $\lg(4x-1) \geq 1$;

в) $\ln(3x+2) < 0$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

317. а) $\log_3(12-2x-x^2) > 2$;

б) $\log_2(x^2-x-4) \leq 3$;

в) $\lg(x+1) + \lg x < \lg 2$;

г) $\lg^2 x + 2\lg x \geq 3$.

318. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^{x-2y} = 1, \\ \log_2 x + \log_2(2y+7) = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3(4x+y) = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 2. \end{cases}$

Ба параграфи 7

319. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y = 2 - 3e^{5-2x}$;

б) $y = 4 \cdot 7^{4x-1}$;

в) $y = \left(\frac{1}{e^{2x}}\right)^7$;

г) $y = 5^{-3x}$.

320. Барои функсияҳои зерин намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $y = e^{4x} - 3e^{-2x}$;

б) $y = 3e^{0,5x}$;

в) $y = 4^x$;

г) $y = 0,3^x$.

321. Ҳосилаи функсияро ҳисоб кунед:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ y = x \lg 5x; & \text{б)} \ y = \ln(\sin x); \\ \text{в)} \ y = \log_2(3x+1); & \text{г)} \ y = \log_{0,2}(x^2+1). \end{array}$$

322. Барои функсияҳои зерин ҳосила ва намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

$$\text{a)} \ y = x^{5\sqrt{3}}; \quad \text{б)} \ y = x^{-e}; \quad \text{в)} \ y = x^{\frac{1}{\pi}}; \quad \text{г)} \ y = x^{\sqrt{23}}.$$

323. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсиаро нависед:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ y = \frac{1}{x+3}; & \text{б)} \ y = \frac{4}{x}; \\ \text{в)} \ y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+3}; & \text{г)} \ y = \frac{3}{2x+1}. \end{array}$$

324. Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \ y = 5^x, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 2; \\ \text{б)} \ y = e^x, \ y = 0, \ x = 0, \ x = 1; \\ \text{в)} \ y = \frac{1}{5x}, \ y = 0, \ x = 2, \ x = 10; \\ \text{г)} \ y = x^{\sqrt{5}}, \ y = 0, \ x = 1. \end{array}$$

МАСЪАЛАҲОИ ТЕСТӢ ДОИР БА БОБИ 2

Ба параграфи 4.

1. Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{\frac{x+4}{3}} = 8.$$

A) 4; B) 5; C) 2; D) 6.

2. Муодиларо ҳал кунед:

$$25^x = \frac{1}{125}.$$

A) 2; B) 2,5; C) - 1,5; D) 1,5.

3. Муодиларо ҳал кунед:

$$4 \cdot 3^{2x+1} + 9^x = 39.$$

A) 0,5; B) 1,5; C) 2,5; D) 3.

4. Муодиларо ҳал кунед:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-3x} = 16^{2x-1}.$$

A) 2; B) 3; C) 1; D) 2,5.

5. Муодиларо ҳал кунед:

$$\sqrt[5]{3^x} - \frac{1}{3} = 0.$$

A) 4; B) 5; C) - 5; D) 6.

6. Муодиларо ҳал кунед:

$$\sqrt{3^{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

A) 4; B) 3; C) 1; D) 2.

7. Муодиларо ҳал кунед:

$$3^{x+1} - 28 \cdot 3^x = -25.$$

A) 0; B) 3; C) 2; D) 1.

8. Муодиларо ҳал кунед:

$$5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+2} - 7 = 0.$$

A) 2; B) -2; C) 3; D) 1.

9. Муодиларо ҳал кунед:

$$4^x + 16^x - 2 \cdot 8^x = 0.$$

A) 2; B) 3; C) 0; D) 1.

10. Муодиларо ҳал кунед:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{27}{8}.$$

A) 2; B) 3; C) $2\frac{1}{3}$; D) 6.

11. Муодиларо ҳал кунед:

$$3 \cdot 6^x - \frac{1}{9} \cdot 2^x \cdot 3^x = 104.$$

A) 2; B) 3; C) $2\frac{1}{3}$; D) 4.

12. Муодиларо ҳал кунед:

$$25^x + 9^x = 2 \cdot 15^x.$$

A) 1; B) 3; C) 2; D) 0.

13. Решаи муодиларо ёбед:

$$3 \cdot 9^x + 26 \cdot 3^x - 9 = 0.$$

A) 1; B) -1; C) 2; D) -1,5.

14. Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0.$$

A) 1,5; B) 3; C) 2; D) 1.

15. Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-1,5} = \sqrt{0,75}.$$

A) -1 ; B) 3; C) -2 ; D) 1.

16. Решаи муодиларо ёбед:

$$0,5^{2-x} - 2^{3-x} = -1.$$

A) 1; B) 3; C) 2; D) 0.

17. Мувофиқати байни муодилаҳо ва решаҳои онҳоро муайян кунед:

A) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-3x} = 16^{2x-1},$ 1. 2;

B) $\sqrt[5]{3^x} - \frac{1}{3} = 0,$ 2. 6;

C) $3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{12}{25},$ 3. 1;

D) $0,25^{x-3} = \frac{1}{64},$ 4. $-5,$
5. $-4.$

18. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \frac{2^x}{4^y} = 32, \\ 9^x \cdot 27^y = 27. \end{cases}$$

A) (2; -3); B) (3; -1); C) (2; 3); D) (4; -1).

19. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+1} - 3^{y-1} = 15, \\ 5 \cdot 3^{y-2} - 3 \cdot 2^x = 3. \end{cases}$$

A) (2; 3); B) (3; 2); C) (1; 3); D) (4; 2) .

20. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал карда, дар ҷавоб қимати калони x - ро нишон диҳед:

$$\begin{cases} 5^x \cdot 0,2^{-y} = 5, \\ 3^{xy} = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

A) 2; B) 3; C) 2,5; D) 1 .

21. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал карда, дар ҷавоб қимати калони y - ро нишон диҳед:

$$\begin{cases} 0,6^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^y = \frac{3}{5}, \\ 2^{xy} = 64. \end{cases}$$

A) 4; B) 3; C) 2; D) 1 .

22. Нобаробариро ҳал кунед:

$$3^{2x-1} \leq 27^x.$$

A) (2; $+\infty$); B) (3; 6); C) $[-1; +\infty)$; D) (1; $+\infty$) .

23. Қимати калонтарини x -ро, ки нобаробарии зеринро қаноат мекунонад, ёбед:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{16}.$$

A) 3,5; B) 4; C) 5; D) 4,5 .

24. Нобаробариро ҳал кунед:

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0.$$

A) (0; 1]; B) (0; 1); C) (1; $+\infty$); D) [0; 1] .

25. Нобаробарио ҳал кунед:

$$\sqrt{7} \cdot 49^x \leq 343.$$

A) $(-\infty; \frac{5}{4}]$; B) $(0; \frac{3}{4})$; C) $(1; \frac{7}{3})$; D) $(\frac{5}{4}; +\infty)$.

26. Қимати хурдтарини бутуни x -ро, ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёбед:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}.$$

A) 1; B) -3; C) -1; D) -2.

27. Нобаробарио ҳал кунед:

$$\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0.$$

A) $(2; +\infty)$; B) $[-1; +\infty)$; C) $(-1; +\infty)$; D) $(1; +\infty)$.

28. Қимати калонтарини бутуни x , ки нобаробарии $7x^2 - 3x - 8 \leq 49$ -ро қаноат мекунонад, ёфта шавад.

A) 5; B) 6; C) 4; D) 7.

29. Ҳалҳои бутуни нобаробарии $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} > 9$ -ро дар порчаи $[1; 3]$ ёбед.

A) 1; 2 3; B) 2; 3; C) 3; 4; D) 1.

30. Нобаробарии зеринро ҳал кунед:

$$\frac{4^x}{2^{x+1} - 1} \geq 1.$$

A) $(2; +\infty)$; B) $[-1; +\infty)$; C) $(-1; +\infty)$; D) $(1; +\infty)$.

31. Ҳалли нобаробарио ёбед:

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \geq 2.$$

A) (1; 2); B) (0; 1]; C) [0; 1); D) [0; 1].

32. Қимати калонтарини x -ро, ки нобаробарии зеринро қонеъ мекунонад, ёбед:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} \geq \frac{4}{3}.$$

A) 2; B) 1; C) 3; D) 4.

33. Мувофиқати байни нобаробариҳо ва ҳалҳои онҳоро барқарор кунед:

A) $\sqrt{6^x} \geq 216,$ 1. $\left(\frac{3}{7}; +\infty\right);$

B) $2^{\frac{x-1}{3}} - \frac{1}{2} > 0,$ 2. $[6; +\infty);$

C) $\left(\frac{6}{7}\right)^{5-6x} - \frac{7}{6} \leq 0,$ 3. $[1; +\infty);$

D) $\left(\frac{3}{5}\right)^{1-7x} - 2\frac{7}{9} > 0,$ 4. $(-2; +\infty),$ 5. $(1; +\infty).$

Ба параграфи 5.

34. Ҳисоб кунед:

$$\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4 + 2.$$

A) 4; B) 3; C) 5; D) 2.

35. Ҳисоб кунед:

$$\log_3 \sqrt{3} + \log_3 3^{-1} + \log_4 16.$$

A) 2,5; B) 3; C) 1,5; D) 2.

36. Қимати ифодаро ёбед:

$$2^{5-\log_2 5} + \log_3 27^{-1}.$$

A) 4; B) 3,4; C) 3,5; D) 3,2.

37. Ҳисоб кунед:

$$3\log_4 5 + 2\log_4 \frac{4}{\sqrt{125}} - 3.$$

A) $-2,5$; B) $-1,4$; C) $-1,2$; D) -1 .

38. Қимати ифодаи логарифмиро ёбед:

$$4^{1+2\log_2 3} + 3^{2+\log_9 4}.$$

A) 332; B) 342; C) 243; D) 431.

39. Ҳисоб кунед:

$$3\log_4 5 + 2\log_4 \sqrt{\frac{16}{125}}.$$

A) 1; B) 2,5; C) 3; D) 2.

40. Ҳисоб кунед:

$$4\log_3 6 - 2\log_3 12.$$

A) 1; B) 2; C) 3; D) 2,5.

41. Қимати ифодаро ёбед:

$$2\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_3 \sqrt{3}.$$

A) 3,5; B) 2; C) 3; D) 2,5.

42. Қимати ифодаро ёбед:

$$3^{1+\log_3 11} + 10.$$

A) 35; B) 42; C) 43; D) 25.

43. Ҳисоб кунед:

$$3^{1+\log_3 5} + 2^{2+2\log_4 8}.$$

A) 46; B) 42; C) 43; D) 47.

44. Ҳисоб кунед:

$$\log_6 2 - \log_6 3^{-1} + 2^{\log_2 3}.$$

A) 4; B) 12; C) 8; D) 7.

45. Қимати ифодаро ёбед:

$$9^{2-0,5\log_3 10} + \log_2 0,5.$$

A) 7,4; B) 7,2; C) 7,8; D) 7,1.

46. Қимати ифодаро ёбед:

$$2^{3-\log_2 5} - \log_3 \frac{1}{9}.$$

A) 3,4; B) 3,6; C) 3,8; D) 3,1.

47. Ҳисоб кунед:

$$7^{2\log_7 3+1} + 2\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A) 63; B) 66; C) 62; D) 64.

48. Ҳисоб кунед:

$$81^{0,5\log_3 7 + \frac{1}{4}} - 12.$$

A) 135; B) 132; C) 122; D) 134.

49. Қимати ифодаро ёбед:

$$\log_{16} 64 + (\sqrt[3]{3})^{\log_3 27}.$$

A) 3,5; B) 4,5; C) 4,2; D) 3,4.

50. Қимати ифодаро ёбед:

$$9^{1+\log_{27} 8} + \log_{\frac{1}{9}} 27.$$

A) 32,5; B) 24,5; C) 34,2; D) 34,5.

51. Ҳисоб кунед:

$$\log_2(\log_2(\log_2 2^{16})) + 10^{\lg 6}.$$

A) 6; B) 8; C) 7; D) 9.

52. Ҳисоб кунед:

$$\log_2(\log_3 81) + 5 \cdot 3^{\log_3 0,2}.$$

A) 3; B) 5; C) 4; D) 2.

53. Мувофиқати байни ифодаҳои логарифмӣ ва қиматҳои онҳоро муайян кунед:

A) $\log_8 16 - \frac{3}{2} \log_2 4 + \frac{2}{3},$ 1. 0,5;

B) $\log_{\frac{1}{4}} \log_{49} \log_2 128,$ 2. 8,5;

C) $\frac{1}{2} \log_3 81 \cdot \log_5 \frac{1}{25},$ 3. - 1;

D) $3 \log_3 \sqrt{27} + 9^{\log_3 2},$ 4. 6;
5. - 4.

Ба параграфи 6.

54. Муодиларо ҳал кунед:

$$\log_{16}(2x - 3) = \frac{1}{2}.$$

A) {3,5}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

55. Муодиларо ҳал кунед:

$$25^{\log_5 2x} = 16.$$

A) {3,5}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

56. Решаи калони муодиларо ёбед:

$$\log_9(x^2 - 4x + 6) = \frac{1}{2}.$$

A) {3,5}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

57. Муодиларо ҳал кунед:

$$\log_2 \log_4 (\log_6 x + 3) = 0.$$

A) {5}; B) {3}; C) {6}; D) {2}.

58. Решаи муодиларо ёбед:

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 - \log_4(2 - x)) = 1.$$

A) {1}; B) {3}; C) {4}; D) {0}.

59. Муодиларо ҳал кунед:

$$\log_4 x + \log_2 x = 3.$$

A) {5}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

60. Муодиларо ҳал кунед:

$$\log_5 x + \log_5 5x = -1.$$

A) {0,5}; B) {0,2}; C) {0,4}; D) {0,3}.

61. Решаи муодиларо ёбед:

$$\lg(x + 2) - \lg_{100}(x + 2) = \frac{1}{2}.$$

A) {8}; B) {6}; C) {4}; D) {7}.

62. Муодиларо ҳал кунед:

$$\lg(4x + 2) - \lg(3x + 4) = 0.$$

A) {5}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

63. Муодиларо ҳал кунед:

$$\log_2(x + 12) - \log_2(6 - x) = 3.$$

A) {5}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

64. Решаи бутуни муодиларо ёбед:

$$x^{\log_3 x + 2} = 27.$$

A) {3}; B) {4}; C) {9}; D) {6}.

65. Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$x^{\frac{\lg x - 1}{2}} = 10.$$

A) {40}; B) {100}; C) {20}; D) {10}.

66. Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$(\sqrt{x})^{\log_4 x + 2} = 8.$$

A) $\left\{\frac{1}{8}\right\}$; B) $\left\{\frac{1}{16}\right\}$; C) {2}; D) {8}.

67. Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$\log_x 9 + \log_3 x = 3.$$

A) {11}; B) {13}; C) {12}; D) {9}.

68. Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$\log_5 x + 1 = \log_x 25.$$

A) {5}; B) $\left\{\frac{1}{15}\right\}$; C) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$; D) {2}.

69. Муодиларо ҳал кунед:

$$\frac{\lg x + 6}{\lg x - 2} = -3.$$

A) {1}; B) {3}; C) {4}; D) {2}.

70. Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$x^{\log_7 4} - 5 \cdot 2^{\log_7 x} + 4 = 0.$$

A) 54; B) 58; C) 48; D) 50.

71. Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$x \cdot 10^{\lg x^{11}} = 110.$$

A) 23; B) 21; C) 18; D) 24.

72. Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$x^{\log_3 x} = \sqrt[4]{3}.$$

A) 4; B) 3; C) 2; D) 1.

73. Мувофиқати байни муодилаҳои логарифмӣ ва решаҳои онҳоро муайян кунед:

- A) $\log_{0,5}(3x - 2) = \log_2(2x - 1)$, 1. 5;
B) $\lg x + \lg(x - 3) = 1$, 2. $2 \pm \sqrt{5}$;
C) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$, 3. 1;
D) $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 4x + 3) = 4$, 4. 6;
5. 3.

74. Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$$

A) (2; 5); B) (1; 3); C) (2; 3); D) (4; 2).

75. Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал карда, қимати $x + y$ - ро ёбед:

$$\begin{cases} 3\log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_{0,5} x + 2\log_2 4y = 7. \end{cases}$$

A) 6,5; B) 7; C) 6; D) 5.

76. Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал карда, қимати $5x - y$ - ро ёбед:

$$\begin{cases} \log_{0,5}(x - 1) + \log_2 y = 3, \\ 3x - 2y = -10. \end{cases}$$

A) 3; B) 2; C) 4; D) 3,4.

77. Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал карда, қимати $\frac{x}{y}$ - ро ёбед:

$$\begin{cases} 3\log_2(x-2) - 2\log_{\sqrt{2}}y = -2, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y+1) = 2. \end{cases}$$

A) 1,5; B) 0,6; C) 2,5; D) 1,8.

78. Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 2.$$

A) $(-\infty; 1,25)$; B) $(1; 1,25)$; C) $(0; 1)$; D) $(1; 1,25]$.

79. Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$\log_4(1-3x) \leq -1.$$

A) $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$; B) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; C) $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; D) $(1; 1,25]$.

80. Қимати бутуни калонтарини x , ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёфта шавад:

$$\log_{0,5}(1-0,5x) \geq -3.$$

A) 1; B) 2; C) 3; D) -1.

81. Қимати бутуни хурдтарини x , ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёфта шавад:

$$\log_{0,5}(x^2 - 7x + 12) > \log_{0,5}(17 - 3x)$$

A) 0; B) -1; C) 2; D) -2.

82. Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) \geq -2.$$

A) $(2; 4)$; B) $[2,5; 8)$; C) $[-2,5; 2]$; D) $(-2,5; 2]$.

83. Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$\lg(x + 5) \leq 2 - \lg 2.$$

A) (5; 14); B) [-5; 45]; C) (-5; 45]; D) (-1; 25) .

84. Қимати бутуни калонтарини x -ро, ки нобаробарии зеринро қаноат мекунонад, ёбед:

$$\log_3(7 - 4x) \leq 3.$$

A) 2; B) 1; C) 3; D) 4 .

85. Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$\log_{\frac{1}{2}}(7x - 21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x).$$

A) (3; 21); B) [3; 21); C) [3; 21]; D) (3; 12) .

86. Ҳалҳои бутуни нобаробариро ёбед:

$$\log_{0,1}(1 - 3x) \geq \lg(2x + 1).$$

A) 1; 2; B) 0; C) 0; 1; D) 0; 1; 2 .

87. Ҳалли нобаробарии зеринро ёбед:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{2}{x - 3}\right) < -1.$$

A) (-1; 3); B) [-1; 3); C) (1; 3); D) (-1; 4).

88. Қимати хурдтарини x , ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёфта шавад:

$$\log_{0,5}(2 - 3x) \geq \log_{0,5}(4x - 1).$$

A) $\frac{4}{7}$; B) $\frac{3}{8}$; C) $\frac{3}{7}$; D) $\frac{2}{7}$.

89. Мувофиқати байни нобаробариҳои логарифмӣ ва ҳалҳои онҳоро муайян кунед:

A) $\log_3\left(1 - \frac{x}{2}\right) < -1$, 1. [-7,5; 2,5);

94. Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$f(x) = 3^{-x} + ex.$$

A) $-\ln 3 \cdot 3^{-x} + e$; B) $\ln 3 \cdot 3^{-x} + 2e$;

C) $-\ln 3 \cdot 3^x + e$; D) $3^{-x} + e$.

95. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_0^1 2e^{2x} dx.$$

A) $e + 1$; B) $3e - 2$; C) $e^2 - 1$; D) $3e$.

96. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+1}.$$

A) $\ln 3 - 1$; B) $\ln 3 - \ln 2$; C) e ; D) $\ln 4$.

97. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_5^8 \frac{dx}{9-x}.$$

A) $\ln 2$; B) $\ln \frac{1}{4}$; C) $2\ln 4$; D) $\ln 4$.

98. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_3^6 \frac{dx}{2x-1}.$$

A) $0,5\ln 2,2$; B) $0,5\ln \frac{1}{4}$; C) $2\ln 0,2$; D) $0,4\ln 4$.

99. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{6-5x}.$$

A) $0,2\ln 2,2$; B) $0,2\ln \frac{6}{11}$; C) $2\ln \frac{11}{6}$; D) $0,2\ln \frac{11}{6}$.

100. Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$f(x) = \log_5(1-3x).$$

A) $\frac{3}{\ln 5 \cdot (3x-1)}$; B) $\frac{3}{\ln 5 \cdot (1-3x)}$; C) $\frac{3\ln 5}{3x-1}$; D) $\frac{3x-1}{\ln 5}$.

101. Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 2,5$ ёбед:

$$2\log_4 \sqrt{1-2x}.$$

A) $\frac{2}{3\ln 2}$; B) $\frac{3}{5\ln 4}$; C) $\frac{1}{2\ln 4}$; D) $\frac{1}{3\ln 4}$.

102. Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 3$ ёбед:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log_{0,2}(x+3)^4.$$

A) $\frac{1}{3\ln 5}$; B) $-\frac{1}{3\ln 5}$; C) $\frac{5}{3\ln 2}$; D) $\frac{4}{\ln 6}$.

103. Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 6$ ёбед:

$$f(x) = \frac{3}{2} \log_{\sqrt{3}}(2-x)^4.$$

A) $\frac{2}{\ln 3}$; B) $\frac{3}{\ln 3}$; C) $\frac{1}{2\ln 3}$; D) $\frac{8}{3\ln 3}$.

ҶАВОБҲО

- 94.** Дуюм, панҷум ва ҳафтумаш. **98.** $[0; 2,5]$. **99.** а) 9; б) 1.
- 100.** $\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}-2)(\sqrt[4]{a}+2)$; б) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$. **101.** 2,25. **102.**
- а) $x > y$; б), в) $x < y$. **103.** а), б), г) $a < 1$; в) $a > 1$. **105.** а) $(1; \infty)$;
 б) в) $(-\infty; 0)$; г) $(-5; \infty)$; д) $(-2; \infty)$; е) $[2; +\infty)$; ж) $[0; \infty)$; з)
 $[1; \infty)$. **106.** а) $y_{\min} = 0,5$, $y_{\max} = 2$; б) $y_{\min} = 2$, $y_{\max} = 10$; в)
 $y_{\min} = \frac{1}{4}$, $y_{\max} = 4$; г) $y_{\min} = -\frac{5}{6}$, $y_{\max} = 0$. **107.** а) +; б) +; в) -;
 г) -. **108.** а) 2; б) 1; в) -1; г) 0. *Нишондод:* графики
 функцияҳои $y = 3^x$ ва $y = 1 - x$ -ро дар як системаи координатӣ
 кашида пайхас менамоем, ки абсиссаи нуқтаи буриш $x = 0$ аст;
 исбот мекунем, ки графикҳо дигар нуқтаи буриш надоранд.
 Барои ин аз хосиятҳои мувофиқи функцияҳои нишондиҳандагӣ
 ва хаттӣ истифода мебарем. Ҳангоми $x > 0$ будан функцияи
 $y = 3^x$ қиматҳои аз 1 калонро қабул мекунад, вале функцияи
 $y = 1 - x$ мувофиқан қиматҳои аз 1 хурдтарро (Ҳангоми $x < 0$
 будан функцияҳо мувофиқан қиматҳои аз 1 хурд ва аз 1
 калонро қабул менамоянд.). Хулоса, графикҳо дар дигар
 нуқтаҳо ҳамдигарро намебуранд. **109.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 2. **110.**
 а) $(-\infty; 2)$; б) $(3; \infty)$. **111.** а), б) $(0; \infty)$ (ниг. ба нишондоди
 машқи 108). **112.** а) 9; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{7}{3}$; г) $\sqrt{1,6}$. **113.** а) $x + y$; б)
 $\frac{1}{\sqrt{x} + 4}$; в) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; г) $\sqrt[3]{x} - 2$. **114.** а) якумаш; б) дуумаш. **115.**
 а) $\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{x^2}$. **116.** а) $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2}{3}\pi + 4n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
117. а) 5; б) -4; в) 3,5; г) 4. **118.** а) 2; б) -1; в) 2,5; г) -2,25. **119.**

а) $-1,5$; б) $-2,5$; в) -4 ; г) -5 . **120.** а) 3 ; б) 0 ; в) $-\frac{2}{3}$; г) 3 . **121.** а) 0 ; б) 1 ; в) 0 ; г) 2 . **122.** а) 2 ; б) 1 ; в) 3 ; г) $\frac{1}{2}$. **123.** а) 1 ; б) 1 ; в) -1 ; г) 3 . **124.** а) 4 ; б) -1 ; в) $-0,5$; г) -2 . **125.** а) 1 ва 3 ; б) 0 ; в) 3 ва 4 ; г) 2 . **126.** а) 17 ; б) 0 ва $\frac{1}{2}$; в) 2 ; г) 0 . **127.** x калон аст. **128.** 1 . **129.** $1\frac{1}{3}$. **130.** 28 ва 20 . **131.** а) $[-1; \infty)$; б) $(5; \infty)$; в) $[-4; +\infty)$; г) $(-\infty; 0]$. **132.** а) $(-2; \infty)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $[\frac{3}{2}; \infty)$; г) $(-\infty; 0]$. **133.** а) $(-0,25; \infty)$; б) $(3; \infty)$; в) $[\frac{2}{3}; \infty)$; г) $(-\infty; 1]$. **134.** а) $[\frac{1}{3}; 3]$; б) $(-\infty; \frac{1}{5}] \cup [3; +\infty)$; в) $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [4; \infty)$; г) $(0; 2)$. **135.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; 4,5)$; в) $(-2; -1]$; г) $(-\infty; -1) \cup [2; \infty)$. **136.** а) $(-\infty; 0]$; б) $(-2; +\infty)$; в) $(-2; 1)$; г) $[0; \infty)$. **137.** $y_{\max} = 1$, ҳангоми $x = 0$ будан. **138.** $(-3; -5)$ ва $(5; 3)$. **139.** а) $\frac{1}{4}$; б) -1 . **140.** 2 . **141.** $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$. **142.** 1 . **143.** а) $(3; -1)$; б) $(\frac{3}{14}; -\frac{1}{14})$; в) $(2; -1)$; г) $(0; 1)$. **144.** а) $(1; 1)$; б) $(1; 1)$; в) $(5; 3)$; г) $(25; 16)$ ва $(16; 25)$. **145.** $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. **146.** 200 . **147.** $f_{\min} = 0$ ҳангоми $x = 0$, $f_{\max} = \frac{1}{2}$ ҳангоми $x = -0,5$. **148.** а) $20\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}(\pi + 2)$. **149.** а) $x \neq 1$; б) $[-2; 2]$. **153.** а) $5; -3; 1,5; \frac{2}{3}$. б) $3; -1; 0,5; 0,4$. в) $2; -2; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}$. **154.** а) 3 ; б) 2 ; в) $\frac{1}{10}$; г) $3\sqrt[3]{9}$. **155.** а) $\frac{1}{2}$; б) 25 ; в) 16 ; г) $\frac{1}{36}$. **156.** а) $\frac{1}{81}$; б) 1 ; в) $\frac{1}{7}$; г) 32 . **157.** а) $\log_4 16$;

$\log_4 \frac{1}{16}$; $\log_4 4$; $\log_4 1$. б) $\log_2 2$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_2 1$; $\log_2 16$. в) $\log_3 81$; $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 3$; $\log_3 9$. г) $\log_5 \frac{1}{125}$; $\log_5 \frac{1}{25}$; $\log_5 25$; $\log_5 5$. **158.** а) 3; б) 3,14; в) 1; г) 1,4. **159.** а) 12; б) $3\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **160.** а) 4; б) $\frac{1}{16}$; в) 4; г) 1. **161.** $\left[-\frac{2}{7}; \infty\right)$. **162.** 16%. **163.** 4905. **164.** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. **165.** 1. **166.** б) $-0,2\left[2(1 + \log_2 a) - \frac{3}{7} \log_2 b\right]$. **167.** б) $1 - 2\lg a - \lg b - 3\lg c$. **168.** а) 3; б) -1; в) -4; г) 2. **169.** а) $1 + a + b$; б) $1 + b$; в) $3a + b$; г) $2 + a$. **170.** а) 2; б) 4; в) 2; г) -1. **171.** а) 6; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 2. **172.** а) 7,5; б) $4\frac{4}{9}$; в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$; г) $\frac{1}{4}$. **173.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 2; г) 2. **174.** а) 49; б) 5; в) 3; г) 27. **175.** а) -3; б) $\frac{1}{2}$; в) -1; г) 1. **178.** 3. **179.** $-\frac{1}{3}$. **181.** $1 + \sqrt{a}$. **182.** $1 + \sqrt{3}$. **184.** а) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; б) $(-4; 4)$; в) $[0; 9)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **185.** а) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$; б) $(-3; 1)$; в) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$. **186.** а) $(2\pi n; 2\pi n + \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $(0; \infty)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $(-\infty; 0)$. **187.** а) Дуюмаш калон; б), в), г) якумаш калон; д), е) дуюмаш калон. **188.** а), б), в), г) якумаш калон; д), е) дуюмаш калон. **189.** а) хурд; б)

калон; в) хурд; г) калон. **190.** а) -1 ; б) 2 ; в) 0 ; г) 0 . **191.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{81}$; в) 25 ; г) $\frac{1}{\pi^2}$. **192.** а) $f_{\min} = -\frac{1}{2}$ хангоми $x = 2$, $f_{\max} = 2$ хангоми $x = \frac{1}{16}$; б) $f_{\min} = 0$ хангоми $x = 1$, $f_{\max} = 2$ хангоми $x = 4$. **193.** $\frac{5}{2}$. **194.** Ҳ а л. Хангоми $x < 1$ будан қисми чапи нобаробарӣ манфӣ буда, қисми ростав мусбат аст. Бинобар ин вай ҷой надорад. Хангоми $x > 2$ будан тавре возеҳ аст, нобаробарӣ дуруст мебошад. Агар $1 < x < 2$ бошад, он гоҳ нобаробарии мазкур ба нобаробарии $2 - x > 2(x - 1)$ ё ба $x < \frac{4}{3}$ баробарқувва аст. Ҷ а в о б: $\left(1; \frac{4}{3}\right) \cup (2; \infty)$. **195.** 10 ва 20 китоб.

196. $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. **197.** 126. **199.** а) 2 ; б) -3 ; в) 4 ; г) $-\frac{1}{2}$. **200.** а) $0,4$; б) $0,1$. **201.** а), б) Дуюмаш калон; в) якумаш калон; г) дуюмаш калон. **202.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1 ; в) $6\frac{1}{4}$; г) $\emptyset$. **203.** а) $\left[\frac{5}{3}; \infty\right)$; б) $(4; \infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $(0; \infty)$. **204.** Нишондод: аз формулаи гузариш ва баробарии $10^M = e$, ки $M = 0,4343$ аст, истифода баред. **205.** 6. **206.** 10. **207.** $b - a$. **208.** $\frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **209.** $(0; 2]$. **210.** а) $\log_8 0,4$; б) $\log_{0,2} 4$; в) $\log_3 7$; г) $\log_9 e$. **211.** а) $1 + \log_{0,3} 2$; б) $\pm \sqrt{\log_4 5}$; в) $\frac{\lg 6}{2}$; г) $\frac{2 - \ln 2}{5}$. **212.** а) 9 ; б) 5 ; в) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; г) e^2 . **213.** а) 5 ; б) -3 ва 1 ; в) 3 ; г) $4,5$. **214.** а) $\frac{4}{25}$; б) 10 ; в) 18 ; г) 14 . **215.** а) $\frac{9}{2}$; б) 100 ва 1000 ; в) 10 ; г) 2 . **216.** а) 3 ва 9 ;

б) e^{-2} ва e ; в) $\sqrt{3}$ ва 27; г) 0 ва 9. **217.** а) 4; б) $\frac{1}{7}$; в) 32; г) -21.

218. а) $\frac{16}{5}$; б) 9; в) 32; г) $\frac{1}{2}$ ва 4. **219.** а) 0 ва 2; б) 2; в) 0,1 ва

100; г) 10 ва 100. **220.** 2. **221.** 25 ab . **222.** 36 ва 40 км/соат. **223.**

0,003. **224.** о ва $\frac{9}{4}$. **225.** а) $(2; \infty)$; б) $\left(\frac{1}{16}; \infty\right)$; в) $(0,6; \infty)$; г)

$\left(\frac{25}{4}; \infty\right)$. **226.** а) $(2; 11)$; б) $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; в) $\left(8\frac{2}{3}; \infty\right)$; г) $(5; \infty)$. **227.**

а) $(4; \infty)$; б) $[5; \infty)$; в) $\emptyset$; г) $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$. **228.** а) $(0; 1)$; б) $(1; 3]$; в) $(-$

$4; -3) \cup (4; 5)$; г) $(-3; 2)$. **229.** а) $[1; e]$; б) $(0; 5^{-\sqrt{3}}) \cup (5^{\sqrt{3}}; \infty)$; в)

$(0; 10^{-4}) \cup (10; \infty)$; г) $[5^{-5}; 5^5]$. **230.** а) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$,

$n \in \mathbb{Z}$; б) $[e; e^3]$; в) $\left[-\frac{7\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; г)

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}; 10\right)$. **231.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **232.** 1. **233.** Дар $(-\infty; 3)$

афзуда, дар $(3; \infty)$ кам мешавад. $f_{\max} = 1$ ҳангоми $x = 3$ будан.

234. $3 - a$. **235.** 16 ва 24. **236.** а) $(53; 28)$; б) $(4; 16)$; в) $(6; 2)$; г)

$(6; 8)$. **237.** а) $(1; 4)$; б) $(5; 2)$; в) $(25; 36)$; г) $(9; 6)$. **238.** а) $(100;$

$10)$; б) $(2; 18)$ ва $(18; 2)$; в) $(4; 2)$; г) $(50; -49)$. **239.** $\frac{5}{5-a}$. **240.**

$(2; 3,5]$. **241.** 12 км/соат. **242.** Ҳ а л. Аз ду тарафи муодила аз

рӯи асоси x ($x \neq 1$, $x > 0$) логарифм гирифта, муодилаи

$\log_x 16 \cdot \log_x 2 = \log_x 8 + 1$ -ро ҳосил мекунем. Агар ҳосиятҳои

логарифмро истифода кунем, он гоҳ муодиларо дар намуди

$4\log_x^2 2 = 3\log_x 2 + 1$ навишта метавонем. Гузориши $t = \log_x 2$ -

ро истифода карда, муодилаи квадрати $4t^2 - 3t - 1 = 0$ -ро соҳиб мешавем. $t_1 = -\frac{1}{4}$ ва $t_2 = 1$ решаҳои ин муодилаанд. Аз

баробариҳои $\log_x 2 = 1$ ва $\log_x 2 = -\frac{1}{4}$ ҳалли матлубро меёбем.

Ч а в о б: $\frac{1}{16}$ ва 2. **244.** а) $2e^x$; б) $3 - 5e^{-x}$; в) $-\frac{1}{3}e^x$; г)

$-5e^{-x} + 2x$. **245.** а) $e^x(\sin x + \cos x)$; б) $2e^x + 3$; в) $8x - 4^x \ln 4$; г)

$x \cdot 3^x(2 + x \ln 3)$. **246.** а) $e^{x^2} \left(2x \cdot \cos \frac{x}{2} - 0,5 \sin \frac{x}{2} \right)$; б)

$6^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\ln 6 \cdot \operatorname{tg} 4x}{2} + \frac{4}{\cos^2 4x} \right)$; в) $\frac{(2+2^x) \ln 2}{(1+2^{-x})^2}$; г) $-\frac{0,2^{-x}(x \ln 0,2 + \ln 0,2 + 1)}{(x+1)^2}$.

247. а) $y - x - 1 = 0$; б) $y - 2x \ln 2 - 2 + 2 \ln 2 = 0$; в) $y + x - 1 = 0$; г)

$3y + x \ln 3 - \ln 3 - 1 = 0$. **248.** а) Дар $\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ афзуда, дар

$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ кам мешавад. $f_{\min} = -\frac{1}{3e}$ ҳангоми $x = -\frac{1}{3}$ будан; б)

дар $\left(0; \frac{2}{\ln 4}\right)$ афзуда, дар $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 4}; \infty\right)$ кам

мешавад. $f_{\min} = 0$ ҳангоми $x = 0$ ва $f_{\max} = \left(\frac{2}{\ln 4}\right)^2 \cdot 4^{-\frac{2}{\ln 4}}$

ҳангоми $x = \frac{2}{\ln 4}$ будан; в) дар $(-\infty; 1)$ афзуда, дар $(1; \infty)$ кам

мешавад. $f_{\max} = \frac{1}{e}$ ҳангоми $x = 1$ будан; г) Х а л.

$f'(x) = x \cdot 2^x(2 + x \ln 2)$, $f'(x) > 0$ агар $x > 0$ ё $x < -\frac{2}{\ln 2}$ бошад.

$f'(x) < 0$ агар $-\frac{2}{\ln 2} < x < 0$ бошад. Ҳамин тарик, дар

$\left(-\infty; -\frac{2}{\ln 2}\right) \cup (0; \infty)$ функция афзуда, дар $\left(-\frac{2}{\ln 2}; 0\right)$ кам

мешавад. $f_{\min} = 0$ ҳангоми $x = 0$ ва $f_{\max} = \left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{2}{\ln 2}}$

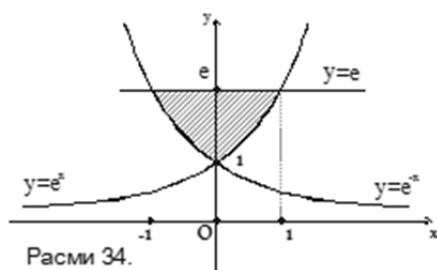
ҳангоми $x = -\frac{2}{\ln 2}$ будан. **249.** $26\frac{2}{3}$. **250.** $\left(\frac{37}{8}; -1\right)$. **251.** 0.

252. Ҳа. $\frac{2a^2}{1+a^4} - 1 = \frac{2a^2 - 1 - a^4}{1+a^4} = -\frac{(a^2-1)^2}{1+a^4} \leq 0$. **253.** 8. **254.** а)

$0,5(e-1)$; б) $\frac{1}{3}(e^3-1)$; в) $\frac{12}{\ln 2}$; г) $\frac{14}{\ln 4}$. **255.** а) $\frac{e^2-1}{e}$; б)

$\frac{3}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 2}$; в) $\frac{6}{\ln 3}$; г)

$\frac{e^2+1}{2} - e$. **256.** а) $2 - \frac{1}{\ln 2}$; б)



Ҳа. Графики функцияҳои додашударо

схемаи месозем (расми 34).

Соҳаеро, ки масоҳати онро

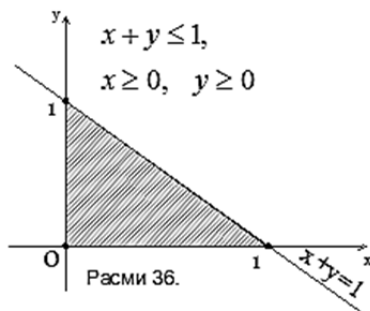
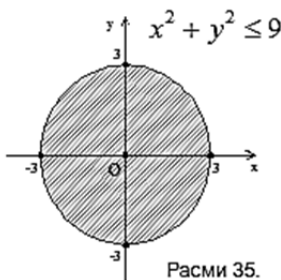
ёфтан зарур аст, бо хати рах-рах кайд мекунем. Аз нақша дида мешавад, ки масоҳати матлуб чунин аст:

$$S = 2e - \int_{-1}^0 e^{-x} dx = \int_0^1 e^x dx = 2e + e^{-x} \Big|_{-1}^0 - e^x \Big|_0^1 = 2e + 1 - e - e + 1 = 2; \quad \text{в)}$$

$\frac{3}{\ln 4} - 1$; г) $\frac{e^4-5}{4}$. **257.** $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{36} + \frac{n\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. **258.** Не. **259.** 10

рӯз; 20 деталӣ. **260.** а) Расми 35; б) Расми 36. **261.** $-3\frac{4}{7}$. **262.** а)

$$-\left(\frac{1}{4} \log a + \log b + \log 2\right);$$



б) $-\frac{1}{2}(\log 2 - \log 3 + \frac{1}{3}\log c - \frac{1}{2}\log d)$. **263.** а) $\frac{5}{2+5x}$; б)

$\frac{1}{(x+4)\ln 0,2}$; в) $\frac{1}{x\ln 10} - \cos x$; г) $\frac{2}{(2x+1)\ln 3}$. **264.** а) $1 + \ln x$; б)

$x(2\ln x + 1)$; в) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$; г) $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. **265.** а)

$\frac{1+x[x-2(x+3)\ln(x+3)]}{(x+3)(x^2+1)^2}$; б) $\frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)\ln^2(1-x)}$; в) $\frac{x(2\ln 3x-1)}{\ln^2 3x}$;

г) $\frac{1+x(1-\ln 4\log_4 x)}{x\ln 4 \cdot (x+1)^2}$. **266.** а) $y-x=0$; б) $y-2x+1=0$; в)

$y-3ex+6=0$; г) $y-\frac{1}{\ln 2}x=0$. **267.** а) дар $(0; e^{-2})$ кам шуда,

дар $(e^{-2}; \infty)$ меафзояд. $f_{\min} = -\frac{2}{e}$ ҳангоми $x=e^{-2}$ будан; б)

дар $(0; e)$ афзуда, дар $(e; \infty)$ кам мешавад. $f_{\max} = \frac{1}{e}$ ҳангоми

$x=e$ будан; в) дар $(0; 1)$ кам шуда, дар $(1; \infty)$ меафзояд.

$f_{\min} = 1$ ҳангоми $x=1$ будан; г) дар $(0; \frac{1}{\sqrt{e}})$ кам шуда, дар

$(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty)$ меафзояд. $f_{\min} = -\frac{1}{2e}$ ҳангоми $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ будан. **268.**

$e-1$. **269.** -2 ва 1 . **270.** $\frac{3^{\lg x} \ln 3}{\cos^2 x}$. **271.** $\sqrt[4]{x}-3$. **272.** $(12; 7)$ ва $(-7; -$

- 12). **273.** а) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$; б) $\sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$; в) $\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$; г) $-\sqrt{7}x^{-\sqrt{7}-1}$. **274.** а) $-e \cdot x^{-e-1}$; б) $\frac{1}{2}\ln 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\ln 4-1}$; в) $3\ln 2 \cdot (3x)^{\ln 2-1}$; г) $\pi x^{\pi-1}$. **275.** а) $\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{2(1+\sqrt{2})}+C$; б) $\frac{x^{3\sqrt{2}+1}}{1+3\sqrt{2}}+C$; в) $\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$; г) $\frac{x^{1-\sqrt{5}}}{5(\sqrt{5}-1)}+C$. **276.** а) $2\ln|x+3|+C$; б) $\ln|x+1|+C$; в) $2\ln|x|+C$; г) $\ln\frac{x^2}{|x+4|}+C$.
- 277.** а) $\frac{62}{5}$; б) $4(\sqrt{2}-1)$; в) 5; г) 4. **278.** а) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(1-2^{-\sqrt{2}-2})$; в) $90\frac{5}{7}$; г) $18\frac{3}{4}$. **279.** а) $2+\ln 4$; б) $3\ln 3$; в) $1,5\ln 2$; г) $8+\ln 2$. **280.** $(-\infty; \infty)$. **281.** 0,5. **282.** Қалам 7 дирам ва дафтар 14 дирам меистад. **283.** $f_{\min}=-2,5$ ҳангоми $x=-2$ ва $f_{\max}=-2$ ҳангоми $x=-1$ будан. **284.** Н и ш о н д о д: аз формулаи суммаи синусҳо ва фарқи косинусҳои ду кунҷ истифода баред. **287.** $\approx 3,4$ сол. **288.** $\approx 36,7$ сол. **289.** ≈ 5280 сол. **290.** 1,21 маротиба. **291.** Тахминан баъди 57 сол. **292.** $\frac{1000\ln 0,6}{\ln 0,8}$. **293.** $y(y-1)(y-2)$. **294.** $-(\sin \alpha + \cos \alpha)$. **295.** 12 см ва 5 см. **296.** -4 ва 5. **297.** $\frac{4}{3}$. **299.** а), г) Якумаш; б), в) дуюмаш.
- 300.** а) $\frac{1}{28}$; б) 1; в) 2; г) $-\frac{5}{2}$. **301.** а) 0; б) $\ln 3$; в) 0 ва 1; г) -1 ва 1. **302.** а) $(3; \infty)$; б) $(-\infty; -0,5)$; в) $[-1,5; \infty)$; г) $(-\infty; -0,25]$. **303.** а) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; б) $(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[0; \infty)$. **304.** а) $(0; 1)$; б) $(1; 1)$; в) $(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2})$ ва $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2})$;

г) (2; 1) ва (1; 2). **305.** а) 2,5; б) -3; в) -2; г) $-\frac{1}{2}$. **306.** а) 40; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,4; г) 0,3. **307.** б) $5\lg c - \frac{2}{3}(1 + \lg b)$; г) $2(1 + \log_{0,4} b) - 4,5 \log_{0,4} c$. **308.** а) 49; б) 63; в) $17\frac{7}{9}$; г) 0,09. **310.** а) $\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$; б) $(-\infty; 7)$; в) $(-3; 3)$; г) $(-2; 3)$. **311.** б), в) якумаш; а), г) дююмаш. **312.** а) $\log_2 5$; б) $\log_{0,3} \frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{\log_4 1,25}$; г) $-\log_2 108$. **313.** а) 18,5; б) 2; в) 0,6; г) $\frac{5}{7}$. **314.** а) 3 ва 9; б) 1; в) -4 ва 5; г) $-\sqrt{6}$ ва $\sqrt{6}$. **315.** а) 2; б) 2; в) 0; г) 100 ва 0,01. **316.** а) $\left[3\frac{1}{8}; \infty\right)$; б) $\left[\frac{11}{4}; \infty\right)$; в) $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **317.** а) $(-3; 1)$; б) $\left[-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4\right]$; в) $(0; 1)$; г) $(0, 0,001] \cup [10, \infty)$. **318.** а) (2; 5) ва (5; 2); б) $\left(1; \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{4}; 8\right)$ ва (2; 1); г) (2; 4). **319.** а) $6e^{5-2x}$; б) $16 \cdot 7^{4x-1} \ln 7$; в) $-14e^{-14x}$; г) $-3 \cdot 5^{-3x} \ln 5$. **320.** а) $\frac{1}{4}e^{4x} + \frac{3}{2}e^{-2x} + C$; б) $6e^{0,5x} + C$; в) $\frac{4^x}{\ln 4} + C$; г) $\frac{0,3^x}{\ln 0,3} + C$. **321.** а) $\frac{1}{x \ln 10} + \lg 5x$; б) ctgx ; в) $\frac{3}{(3x+1)\ln 2}$; г) $\frac{2x}{(x^2+1)\ln 0,2}$. **322.** а) $5\sqrt{3}x^{5\sqrt{3}-1}$ ва $\frac{x^{5\sqrt{3}+1}}{5\sqrt{3}+1} + C$; б) $-ex^{-e-1}$ ва $\frac{x^{1-e}}{1-e} + C$; в) $\frac{1}{\pi}x^{\frac{1}{\pi}-1}$ ва

$$\frac{\pi x^{\frac{1}{\pi}+1}}{\pi+1}+C; \text{ r) } \sqrt{23}x^{\sqrt{23}-1} \text{ ба } \frac{x^{\sqrt{23}+1}}{\sqrt{23}+1}+C. \text{ 323. a) } \ln|x+3|+C; \text{ б) }$$

$$4\ln|x|+C; \text{ в) } \ln\frac{\sqrt{|x|}}{|x+3|}+C; \text{ r) } \frac{3}{2}\ln|2x+1|+C. \text{ 324. a) } \frac{20}{\ln 5}; \text{ б) }$$

$$e-1; \text{ в) } \frac{\ln 5}{5}; \text{ r) } \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Ҷавобҳои масъалаҳои тестӣ

1. B. 2. C. 3. A. 4. C. 5. C. 6. D. 7. A. 8. B. 9. C. 10. B. 11. A. 12. D. 13. B. 14. D. 15. A. 16. C. 17. A-3; B-4; C-1; D-2. 18. B. 19. A. 20. A. 21. C. 22. D. 23. B. 24. D. 25. A. 26. C. 27. B. 28. A. 29. D. 30. C. 31. B. 32. B. 33. A-2; B-4; C-3; D-1. 34. A. 35. C. 36. B. 37. B. 38. B. 39. D. 40. B. 41. A. 42. C. 43. D. 44. A. 45. D. 46. B. 47. C. 48. A. 49. B. 50. D. 51. B. 52. A. 53. A-3; B-1; C-5; D-2. 54. A. 55. D. 56. B. 57. C. 58. D. 59. C. 60. B. 61. A. 62. D. 63. C. 64. A. 65. D. 66. B. 67. C. 68. C. 69. A. 70. D. 71. B. 72. D. 73. A-3; B-5; C-2; D-1. 74. D. 75. C. 76. A. 77. A. 78. D. 79. C. 80. A. 81. A. 82. D. 83. C. 84. B. 85. A. 86. B. 87. A. 88. C. 89. A-3; B-5; C-2; D-1. 90. A. 91. A. 92. A. 93. A. 94. A. 95. C. 96. B. 97. D. 98. A. 99. D. 100. A. 101. C. 102. A. 103. B.

ТАКРОР

Дар поён мисолу масъалаҳое гирд оварда шудаанд, ки ҳалли онҳо зарурияти истифодаи тамоми паҳлӯҳои маводи назариявиро аз курсҳои «Математика»-и синфҳои IV-VI ва «Алгебра»-и синфҳои VII-XI тақозо мекунад. Маводи ин боб барои тайёри ва бомуваффақият супурдани имтиҳони хатмкунӣ пешбинӣ мешавад.

§8. АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

26. Ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ

325. Исбот кунед, ки ҳосили зарби се адади пай дар пайи дилхоҳи натуралӣ ҳам ба 2 ва ҳам ба 3 тақсим мешавад.

326. Исбот кунед, ки адади шумораи нулҳояш чуфти $1000 \dots 0001$ ба адади 11 тақсим мешавад.

327. Исбот кунед, ки барои ҳеҷ гуна қимати натуралии n ифодаи $n^2 + 1$ ба 3 тақсим намешавад.

328 Дар адади $642 \dots$ ба чои нуктаҳо ду рақамро чунон нависед, ки адади ҳосилшудаи панчрақама: а) ба 3 ва ба 5; б) ба 4 ва ба 9 тақсим шавад.

329. Суммаи се адади тоқи пай дар пай ба 75 баробар аст. Адади аввалинашро ёбед.

330. Суммаи чор адади чуфти пай дар пай ба 84 баробар аст. Адади охиринашро ёбед.

331. Исбот кунед, ки

$$\text{а) } |a| = |-a|; \quad \text{б) } a \leq |a|; \quad \text{в) } |a|^2 = a^2.$$

332. Қимати ифодаро ёбед:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(5,05 : \frac{1}{40} - 2,8 \cdot \frac{5}{6} \right) \cdot 3 + 1,6 \cdot 0,1875 ; \\ \text{б)} & \left(\frac{1}{2} + 0,125 - \frac{1}{6} \right) \cdot \left(6,4 : \frac{80}{3} \right) + \frac{1}{8} ; \\ \text{в)} & \left(6\frac{3}{5} : 6 - 8,016 \cdot 0,125 + \frac{2}{15} \cdot 0,03 \right) \cdot 2\frac{3}{4} ; \\ \text{г)} & \left(9\frac{3}{20} - 1,24 \right) : 2\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4} + 2\frac{5}{8} \right) : 0,625 . \end{aligned}$$

333. Ҳисоб кунед:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{\frac{3}{4} \cdot 1,8 \cdot 1\frac{1}{5} : 0,07}{\frac{1}{5} : 0,49 \cdot 2\frac{5}{8}} ; & \text{б)} & \frac{12,75 \cdot \frac{4}{25} \cdot 1,8}{1\frac{1}{2} \cdot 2,04 : 20} ; \\ \text{в)} & \frac{0,2 \cdot (6,2 : 0,31 - \frac{5}{6} \cdot 0,9)}{2 + 1\frac{4}{11} \cdot 0,22 \cdot 0,1} ; & \text{г)} & \frac{(1,75 \cdot \frac{2}{5} + 1,75 : 1\frac{1}{8}) \cdot 1\frac{5}{7}}{\frac{17}{40} - 0,325) : \frac{1}{5} \cdot 0,4} . \end{aligned}$$

334. КТУ-и ададҳои: а) 180 ва 120; б) 72 ва 90-ро ёбед.

335. ХКУ-и ададҳои: а) 180 ва 140; б) 32 ва 48-ро ёбед.

336. Маълум, ки $a \approx 9,6$ ва $b \approx 4,2$ аст. Қимати тақрибии ифодаро ёбед: а) $4a + b$; б) $a - 2b$; в) $a \cdot b$; г) $\frac{a}{b}$.

337. Ба намуди касри одӣ нависед:

а) 1, (4); б) 0, (37); в) 1, 0(7); г) 1, 2(62); д) 1,(26).

338. Нишон диҳед, ки ададҳои $\sqrt{3}$ ва $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ададҳои

ирратсионалианд.

339. Ададҳоро бо тартиби афзуншавӣ ҷойгир кунед. Аз байни онҳо ададҳои ирратсионалиро нишон диҳед:

- а) $\sqrt{3}$; -2; -1,8; $\frac{\pi}{4}$; б) $\log_2 5$; -2; $\frac{5}{8}$; $-\sqrt{5}$;
 в) 0, (1); $\frac{5}{6}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{e}{2}$; г) e ; -1, (4); $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

340. Ададҳоро муқоиса кунед:

- а) $\frac{2}{\lg \frac{1}{3}}$ ва $\frac{3}{2 \lg \frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{3} + 2$ ва $\sqrt{15}$;
 в) $\log_2 5$ ва $\log_5 2$; г) $8^{\log_3 6}$ ва $6^{\log_3 8}$;
 д) $\cos 2,3$ ва $\cos 6,4$; е) $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ ва $\sqrt{5} + \sqrt{6}$.

341. Ратсионалӣ (бутун) будани ададҳоро нишон диҳед:

- а) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{3} + 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$;
 в) $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}}{\sqrt{8} - \sqrt{3}} - 0,8\sqrt{6}$; г) $(2\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + \sqrt{32}) : \sqrt{2}$;
 д) $\frac{1}{3\sqrt{2} - 4} - \frac{1}{3\sqrt{2} + 4}$; е) $\frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} + \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}}$.

27. Фоизҳо ва таносубҳо

342. p - фоизи адади a - ро ёбед, агар: а) $p=12$, $a=18$; б) $p=35$, $a=64$; в) $p=24$, $a=48$; г) $p=105$, $a=120$ бошад.

343. p - фоизи адад ба a баробар аст. Ададро ёбед, агар:

а) $p=4$, $a=7$; б) $p=36$, $a=16$; в) $p=22$, $a=68$; г) $p=18$, $a=46$ бошад.

344. Адади a нисбати адади b чанд фоизро ташкил мекунад, агар: а) $a=40$, $b=50$; б) $a=75$, $b=35$; в) $a=160$, $b=365$; г) $a=14$, $b=92$?

345. Доя аз 16 сар гов 96 л, дояи дигар аз 14 сар гов 84,28 л шир дӯшиданд. Махсулнокии кори кадоме аз дояҳо хубтар аст?

346. Узви номаълуми таносубро ёбед:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 5\frac{3}{5} : 3\frac{1}{3} = x : 5\frac{1}{4}; & \text{б) } 3\frac{1}{6} : 4\frac{1}{2} = 1 : x; \\ \text{в) } \frac{x}{2,1} = \frac{7,4}{15}; & \text{г) } \frac{0,4}{x} = \frac{14}{3\frac{1}{6}}. \end{array}$$

347. Бузургии x аз таносуби зерин ёфта шавад:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{x}{3\frac{1}{2} \cdot (3\frac{1}{4} - 2,2)} = 12 : \frac{\frac{1}{2} - 0,3}{2 + 1\frac{3}{5}}; \\ \text{б) } \frac{16,2 \cdot 0,25 - 7,4 : \frac{37}{2}}{x} = 9 : (1\frac{11}{20} - 0,945 : 0,9). \end{array}$$

348. Аз ду маҳал, ки масофаи байнашон 31 км аст, дар як вақт ду савора ба роҳ баромаданд. Суръати ҳаракати яке аз савораҳо 12 км/соат, суръати ҳаракати дигар 15 км/соат буд.

Баъди чанде онҳо бо ҳам вомахӯранд. То лаҳзаи вохӯрӣ ҳар кадоме аз савораҳо кадом масофaro тай кардааст?

349. Фарқи ду каср ба $\frac{2}{9}$ баробар буда, суратҳои онҳо ҳамчун 4:1 ва махраҷҳои мувофиқи онҳо ҳамчун 3:1 нисбатдоранд. Ин касрҳоро ёбед.

28. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометрӣ

350. Суммаи узвҳои сеюм ва нухуми прогрессияи арифметикӣ ба 8 баробар аст. Суммаи 11 узви аввалаи ин прогрессияро ёбед.

351. Узви якум ва чоруми прогрессияи арифметикӣ мувофиқан ба 1,2 ва 1,8 баробаранд. Суммаи шаш узви аввалаи онро ёбед.

352. Ҳисоб кунед: $7,5+9,8+12,1+\dots+53,5$.

353. Суммаи ҳамаи ададҳои дуракамаро ҳисоб кунед.

354. Дар байни 3 ва 33 чунин панҷ ададро ёбед, ки онҳо прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд.

355. Дар прогрессияи арифметикӣ узви даҳум ба 13 ва узви панҷум ба 18 баробар аст. Фарқи прогрессияро ёбед.

356. Прогрессияи арифметикии (a_n) –ро ёбед, агар $a_1 + a_5 = 24$ ва $a_2 \cdot a_3 = 60$ бошад.

357. Барои кадом қимати x ададҳои $\lg 2$, $\lg(3^x - 3)$, $\lg(3^x + 9)$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд?

358. Махраҷи прогрессияи геометрӣ ба -2 , суммаи панҷ узви аввалаи он ба 5,5 баробар аст. Узви панҷуми ин прогрессияро ёбед.

359. Махраҷи прогрессияи геометрии (b_n) –ро ёбед, агар $b_1 + b_4 = 14$ ва $b_2 + b_5 = 42$ бошад.

360. Узви якуми прогрессияи геометрии (b_n) –ро ёбед, агар:

а) $b_6 = -\frac{4}{27}$, $q = -\frac{1}{3}$; б) $b_6 = \frac{243}{64}$, $q = 1,5$ бошад.

361. Узви якуми прогрессияи геометрӣ 150, чорумаш 1,2 мебошад. Узви панҷуми прогрессияро ёбед.

362. Ҳисоб кунед:

$$32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + \dots$$

363. Узви сеюми прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед, агар суммаи он ба 1,6 ва узви дуюмаш ба $-0,5$ баробар бошад.

364. Суммаи узвҳои прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед, агар узви сеюм 2 ва узви шашум $\frac{1}{4}$ бошад.

365. Касри даврии беохирро дар шакли касри оддӣ нависед:

а) $0,2(31)$; б) $0,11(3)$; в) $8,4(1)$; г) $2,(02)$.

§9. ТАБДИЛДИҲИИ АЙНИЯТИИ ИФОДАҲО

29. Ифодаҳои алгебравӣ

366. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $a^4 - 1$; б) $4xy + 12y - 4x - 12$;
в) $a^3 + a^2b + a^2 + ab$; г) $x^2 - y^2 - x - y$.

367. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$; б) $\frac{4}{a-2} + \frac{8}{2a-a^2}$;

$$\text{в)} \frac{m^2}{m^2 - 25} \cdot (m^2 + 5m); \quad \text{г)} \frac{1}{a^2 + ab} : \frac{1}{a^2 - ab}.$$

368. Ифодаро сода кунед:

$$\text{а)} \frac{x+y}{2xy-y^2} \cdot \left(x+y - \frac{x^2}{x+y} \right); \quad \text{б)} \frac{2x^2-2y^2}{x} \cdot \frac{4x}{x-y} - \frac{16xy}{x+y};$$

$$\text{в)} \left(\frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{ab}{b^2 - a^2} - \frac{2}{a+b};$$

$$\text{г)} \frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{x}{9+3x} : \left(\frac{9}{x^3-9x} + \frac{1}{x+3} \right).$$

369. Ифодаро сода кунед:

$$\text{а)} \frac{x^3+y^3}{x+y} : (x^2-y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2-y^2};$$

$$\text{б)} \frac{x}{y} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} \left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{y^4}{x^4} \right) \right) \right);$$

$$\text{в)} \left(\frac{x}{y^2+xy} + \frac{x-y}{x^2-xy} \right) : \left(\frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x-y} \right);$$

$$\text{г)} \frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16} - \frac{a^4-16}{a^2+4}.$$

30. Ифодаҳои ки дорони радикалҳо ва дараҷаҳои нишондиҳандашон касрианд

370. Махраҷро аз ирратсионалӣ озод кунед:

$$\text{а)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}; \quad \text{б)} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}; \quad \text{в)} \frac{2}{\sqrt{17}}; \quad \text{г)} \frac{4}{7-\sqrt{3}}.$$

371. Сурати касрро аз ирратсионалӣ озод кунед:

а) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

372. Ҳисоб кунед:

а) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} + (0,63)^0$;

б) $\sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$;

г) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + 2\sqrt{20}$.

373. Ифодаро сода кунед:

а) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{25b^{\frac{2}{3}}}-4}{\sqrt[3]{5b^{\frac{1}{3}}+2}} - \sqrt[3]{5b^{\frac{1}{3}}}$;

в) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1-2\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) - a^{\frac{2}{3}}$;

г) $\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

374. Ифодаро сода карда, қиматашро барои қиматҳои додашудаи параметрҳо ёбед:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{(b+2)^2 - 8b}}{\sqrt{b} - \frac{2}{\sqrt{b}}} \quad \text{ҳангоми } b = 0,0025;$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{x}}{1 - x\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + x}{x + \sqrt{x} + 1} \quad \text{ҳангоми } x = 4;$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{abc+4}{a}} + 4\sqrt{\frac{bc}{a}} : (\sqrt{abc} + 2) \quad \text{ҳангоми } a = 0,04;$$

$$\text{г) } \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \quad \text{ҳангоми } a = 1,2 \text{ ва } b = 0,6$$

будан.

31. Ифодаҳои тригонометрӣ

Ифодаҳоро сода кунед (375-376):

$$\text{375. а) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{4 \sin 25^0 \sin 65^0}{\cos 40^0};$$

$$\text{в) } \sqrt{2} \left(\sin^4 \frac{\pi}{8} - \cos^4 \frac{\pi}{8} \right); \quad \text{г) } \cos 2\gamma + 2 \sin(\gamma + 30^0) \sin(\gamma - 30^0).$$

$$\text{376. а) } 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha; \quad \text{б) } \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\text{в) } \frac{\sin 3\alpha \cos^3 \alpha + \cos 3\alpha \sin^3 \alpha}{\sin 4\alpha};$$

$$\text{г) } \frac{1 + \sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha - \beta)}{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

377. Ёбед:

а) $\operatorname{tg} \alpha$ -ро, агар $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ бошад;

б) $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро, агар $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ бошад;

в) $\sin \alpha$ -ро, агар $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$ бошад;

г) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ -ро, агар $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ бошад.

378. Ҳисоб кунед:

а) $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$; б) $\frac{\sin 120^\circ}{1 + \cos 120^\circ} \cdot \frac{\cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ}$;

в) $2 \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} \right)$;

г) $\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$.

379. Ҳисоб кунед:

а) $\arccos \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$; б) $\frac{10 \sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$;

в) $\frac{\pi}{12} \left[\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) \right]$;

г) $\cos^2 \left(\frac{7}{8}\pi + \alpha \right) + \cos \left(\frac{3}{8}\pi + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} - \alpha \right)$.

380. Ҳисоб кунед:

а) $\operatorname{tg} \beta$ -ро, агар $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ва $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -2$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ -ро, агар $\operatorname{tg} x = 2$;

в) $\sin(2\alpha+3\pi)$ -ро, агар $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$;

г) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ -ро, агар $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ бошад.

32. Ифодаҳое, ки дараҷаҳо ва логарифмҳоро дар бар мегиранд

Ададҳоро муқоиса кунед (381-382):

381. а) 2^{400} ва 3^{200} ; б) $-\log_4 \frac{1}{4}$ ва $8^{\log_3 1}$;
в) 5^{200} ва 2^{500} ; г) $\log_5 \sqrt{2}$ ва $\log_3 \frac{1}{27}$.

382. а) $\log_3 4 + \log_3 6$ ва $\log_3 (4+6)$;
б) $\log_8 9 - \log_8 7$ ва $\log_8 (9-7)$;
в) $4\log_6 2$ ва $\log_6 (4-2)$;
г) $\log_2 1,5 + \log_2 3$ ва $\log_2 1,5^2$.

383. Ифодаро сода кунед:

а) $81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}$; б) $2^{4\log_4 a} - 5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} a}$.

384. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{\lg 2 + \lg 16}{2\lg 2 + \lg 4}$; б) $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$;
в) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}$; г) $\frac{2}{5}(\log_3 81 + 16^{\log_2 3})^{\log_{85} 25}$.

385. Аз баробарӣ x -ро ёбед:

а) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} 5$; б) $\lg x = \lg 6 + \lg 2$;

в) $\log_4 x = \log_2 3 + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$; г) $\log_3 x = \frac{1}{2} \log_3 16 + 3 \log_3 0,5$.

386. Ҳисоб кунед:

а) $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} + \frac{1}{4} \log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b \sqrt{a}$ -ро, агар $\log_a b = 14$;

б) $\log_{\sqrt[4]{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}} + \log_{\sqrt[4]{ab}} \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ -ро, агар $\log_a b = 3$ бошад.

387. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\left(2^{2 + \frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2 \log_3 5}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $2^{\frac{1}{2 \log_5 2}} \cdot 5^{\log_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\log_5 2} - \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_3 25}$.

§10. ФУНКСИЯҲО

33. Функцияҳои ратсионалӣ

388. Фосилаҳои бефосилагии функцияро ёбед:

а) $y = \frac{x-2}{x^2-x}$; б) $y = x^2 - \frac{1}{x+1}$;

в) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$; г) $y = \frac{1}{4x^2 - 2x - 2}$.

389. Чуфт ё тоқ будани функцияро муайян кунед:

а) $y = x^3 - 2x$; б) $y = \frac{4x^2}{1-x^2}$; в) $y = 4x^4 - 2x^2 + 7$;
г) $y = -\frac{4}{x^3}$; д) $y = \frac{2}{x^2} + 3$; е) $y = x^5 - 2x^3$.

390. Фосилаҳои доималоматии функцияро ёбед:

а) $y = \frac{x-2}{3x}$; б) $y = \frac{x^2-9}{4-x^2}$; в) $y = 1 - \frac{x-3}{5x+2}$ г) $y = -x^2 + 3x - 2$.

391. Фосилаҳои афзуншавӣ (камшавӣ) ва нуқтаҳои экстремалии функцияро (агар чунин нуқтаҳо вучуд дошта бошанд) ёбед:

а) $y = 2x^2 + 3x + 1$; б) $y = 1 - \frac{1}{x}$; в) $y = (x-1)^4 - 1$; г) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

392. Функцияро тадқиқ карда, графикашро созед:

а) $y = 2x - 5$; б) $y = 2x^2 - 7x + 3$;
в) $y = -x^2 + 4x - 3$; г) $y = -3 + (x+1)^2$.

393. Магар графикаи функцияҳои:

а) $y = x^2$ ва $y = x + 12$; б) $y = -\frac{2}{x^2}$ ва $y = x^2 - 2$

нуқтаҳои умумӣ доранд?

34. Функцияҳои тригонометрӣ

394. Соҳаи муайянии функцияро ёбед:

а) $y = \frac{4}{\sin^2 x}$; б) $y = \frac{1}{1 + \cos 2x}$;

$$\text{в) } y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos x - \frac{3}{2}};$$

$$\text{г) } y = \frac{x^2}{\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}}.$$

395. Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

$$\text{а) } y = 2 - \cos^2 \frac{x}{2};$$

$$\text{б) } y = 2 \sin x \operatorname{ctg} x;$$

$$\text{в) } y = |\cos x| - 1;$$

$$\text{г) } y = \sqrt{1 - \sin 2x}.$$

396. Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

$$\text{а) } y = 4 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\text{б) } y = 1 - \operatorname{tg} 2x;$$

$$\text{в) } y = 1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\text{г) } y = 2 + \cos 2x.$$

397. Чуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

$$\text{а) } y = \frac{x}{\sin x} - \cos x;$$

$$\text{б) } y = \frac{\cos x \sin^2 x}{x};$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg} 4x - \operatorname{ctg} 2x;$$

$$\text{г) } y = \frac{\cos 2x}{x^2}.$$

398. Даври функсияро ёбед:

$$\text{а) } y = \sin 4x; \text{ б) } y = 2 \operatorname{ctg} x; \text{ в) } y = 1 - \cos 6x; \text{ г) } y = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

399. Экстремали функсияро ёбед:

$$\text{а) } y = 2 + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right);$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 - \cos^2 x};$$

$$\text{в) } y = 0,25 \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right);$$

$$\text{г) } y = \cos^2(5x - \pi).$$

400. Экстремуми функсияро муайян кунед:

$$\text{а) } y = \cos^2 x + \sin^2 x;$$

$$\text{б) } y = 2 - 6 \cos 2x;$$

$$в) y = 1 + |\cos 2x|;$$

$$г) y = 1 + 2|tgx|.$$

35. Функсияҳои дараҷагӣ, нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

401. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

$$а) y = 8x - x^2; \quad б) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad в) y = \sqrt[8]{4 - x^2};$$

$$г) y = \sqrt{x \cdot 4^x - 4^{x+1}}; \quad д) y = \sqrt[10]{2^{\cos x} - 1};$$

$$е) y = \log_3(1 + 4x - x^2); \quad ж) y = \log_3 \cos x;$$

$$з) y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg(x + 10)^2}; \quad и) y = \sqrt[4]{\lg(4x^2 - x)}.$$

402. Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

$$а) y = 3\sqrt{x+1}; \quad б) y = 4^{3-x} - 1; \quad в) y = 1 - \sqrt[4]{x}; \quad г) y = 1 + |\log_3 x|.$$

403. Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

$$а) y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2;$$

$$б) y = 4 - 5^x;$$

$$в) y = \log_3(x + 2);$$

$$г) y = \log_2(x - 3) - 2.$$

404. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

$$а) y = 2^x + 2^{-x};$$

$$б) y = \log_4(1 - x^2);$$

$$в) y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x};$$

$$г) y = x^{\frac{3}{5}}.$$

405. Экстремуми функсияро ёбед:

$$а) y = \sqrt{25 - x^2}; \quad б) y = 5^{\frac{1}{x^2+1}}; \quad в) y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1); \quad г) y = 2^{\sin x}.$$

§11. МУОДИЛАҲО ВА НОБАРОБАРИҲО. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО ВА НОБАРОБАРИҲО

36. Муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ

Муодиларо ҳал кунед (406-407):

406. а) $2(x-1)-7=4-(6x+2)$; б) $2-8(x+2)=3\cdot(x-1)-7$;

в) $\frac{2x+1}{5}=7-\frac{5(x+4)}{2}$; г) $2-\frac{x-4}{3}=x-\frac{4(5+2x)}{9}$.

407. а) $|2x-3|=5$; б) $|2-7x|=8$;

в) $\left|1-\frac{x+3}{2}\right|=2$; г) $\left|\frac{4x-1}{5}-2\right|=1$.

408. Барои кадом қимати a муодилаи:

а) $ax-2x=4(x-2)$ ҳалли ягона дорад;

б) $a(1-x)+3=3x+ax$ ҳал надорад;

в) $1+2(x+3a)=(a-1)x+19$ ҳалли бешумор дорад?

Нобаробариҳо ҳал кунед (409-410):

409. а) $\frac{2}{5}-\frac{9}{10}x>\frac{1}{10}-x$; б) $x-\frac{x+4}{4}+\frac{3x-1}{2}<3$;

в) $\frac{12x-1}{3}<4x-3$; г) $\frac{3x-2}{4}<2(x-1)-\frac{x}{8}$.

410. а) $|2x-3|<1$; б) $|4x+3|\geq 2$;

в) $(x-1)|5-3x|<2$; г) $(x-2)|2x+1|\leq 0$.

411. Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^2 - 2x - 8 = 0$;

б) $3x^2 + 2x = 0$;

в) $\frac{4x^2 - 1}{3} = x(10x - 9)$;

г) $\frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{5}$.

412. Барои кадом қимати k муодилаи:

а) $(k-1)x^2 + (k+4)x + (k+7) = 0$ дуто ҳалли гуногун дорад;

б) $9x^2 - 2x + k = 6 - kx$ дуто ҳалли якхела дорад;

в) $3kx^2 - 6x + k - 2 = 0$ ҳал надорад?

413. Муодилаи $2x^2 - 8x - 11 = 0$ -ро ҳал накарда: а) суммаи решаҳо; б) ҳосили зарби решаҳо; в) суммаи чаппаи решаҳо; г) суммаи квадратҳои решаҳо ро ёбед.

Муодиларо ҳал кунед (414-415):

414. а) $\frac{x^2 - 16}{x + 3} = 0$;

б) $\frac{x}{2x + 3} = \frac{1}{x}$;

в) $\frac{x+1}{6} + \frac{20}{x-1} = 4$;

г) $\frac{4}{x-1} - x = 2$.

415. а) $\frac{x-6}{x-12} - \frac{x-12}{x-6} = \frac{5}{6}$; б) $\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$;

в) $\frac{14x^2}{16-x^2} + \frac{11}{x-4} = \frac{49}{x+4}$; г) $\frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1$.

416. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $2x^2 + 13x - 7 < 0$;

б) $-2x^2 - 5x + 18 \geq 0$;

в) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 0$;

г) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)} < 0$.

37. Муодила ва нобаробариҳои иррационалӣ

Муодиларо ҳал кунед (417-419):

417. а) $\sqrt{x+2} = x$; б) $(x-5)(x+2)\sqrt{x-7} = 0$;

в) $2\sqrt{x+5} = x+2$; г) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+3} = 0$.

418. а) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$; б) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$;

в) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$; г) $\sqrt{1-x}\sqrt{x^2-1} = x-1$.

419. а) $\sqrt{\frac{10+x}{x}} + \sqrt{\frac{10-x}{x}} = \sqrt{6}$; б) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}$;

в) $\sqrt{x^2+5x+1} + 1 = 2x$; г) $\sqrt[3]{5+\sqrt{x+15}} = 1$.

Нобаробариро ҳал кунед (420-421):

420. а) $\sqrt{x-5} < 1$; б) $\sqrt{-x} \cdot (x+1) > 0$;

в) $\sqrt{9x-20} < x$; г) $\sqrt{x+61} < x+5$.

421. а) $\sqrt{5-x} > \sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{x^2+x+2} < 2$;

в) $\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x-1} \geq 0$; г) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \leq 0$.

38. Муодила ва нобаробариҳои тригонометрӣ

Муодиларо ҳал кунед (422-424):

422. а) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$; б) $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$;

в) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$; г) $3\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$.

423. а) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$; б) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$;

в) $2 \cos 2x + 5 \sin x - 3 = 0$; г) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$.

424. а) $2 \sin^2 3x + 5 \sin 3x = 0$; б) $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 0$;

в) $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$; г) $1 - \cos x - 2 \cos \frac{x}{2} = 0$.

425. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $2 \cos 2x \leq \sqrt{3}$; в) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x \leq 1$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 0$.

39. Муодила ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ

Муодиларо ҳал кунед (426-429):

426. а) $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{4}{25}\right)^2$; б) $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$;

в) $2^{5x+1} = 4^{2x}$; г) $2^{x-2} = 1$.

427. а) $\left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x} = \left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x}$; б) $\left(\frac{33}{16}\right)^{\frac{11}{\sqrt{x+1}}+5} = \left(\frac{16}{33}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x+1}}-8}$;

в) $7 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 2 \cdot 5^{-3}$; г) $2 \cdot 4^{x+1} - 2^{x+1} - 1 = 0$.

428. а) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-2}{2}} = 66$;

б) $3^{2x+3} + \sqrt{9^{2x+1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} = 91$;

$$\text{в)} \left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3} + 49^{x-1} + 7^{2x-1} = 399;$$

$$\text{г)} 4^{2-x} - 4^{-(x-1)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - \frac{1}{\sqrt{16^{x-1}}} = 516.$$

$$429. \text{ а)} 2 \cdot 5^{\frac{2}{\sqrt{x}}} - 3 \cdot 10^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 5 \cdot 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}} = 0;$$

$$\text{б)} 9 \cdot 256^{\sqrt{x}} - 6 \cdot 144^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 81^{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\text{в)} 9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0; \quad \text{г)} 11 - 3^x = \sqrt{3^x - 5}.$$

430. Нобаробари ро ҳал кунед:

$$\text{а)} \frac{\sqrt{32}}{16} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x};$$

$$\text{б)} 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x} > \frac{1}{9};$$

$$\text{в)} 4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0;$$

$$\text{г)} 4,2^{x^2+2x-15} > 1.$$

40. Муодила ва нобаробариҳои логарифмӣ

Муодиларо ҳал кунед (431-433):

$$431. \text{ а)} \log_5(x+1) = \log_5(4x-5);$$

$$\text{б)} \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) = \log_3 \frac{1}{x+3};$$

$$\text{в)} 2\log_{0,5}x = \log_{0,5}(2x^2 - x);$$

$$\text{г)} \log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3.$$

432. а) $\log_6(2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$; б) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$;

в) $\log_3 \frac{2x+3}{x-2} = 1$; г) $\log_{3-x} 5 - \frac{1}{2} = 0$.

433. а) $\log_{0,1}[x(x-7)] - \log_{0,1} \frac{9(x-7)}{x} = 0$; б) $\log_4 x + \log_2 x = 3$;

в) $\log_3 x + \log_x \frac{1}{9} = 1$; г) $\log_{\frac{3}{5}} x + 4\log_{\frac{5}{3}} x = 3$.

434. Нобаробариҳо ҳал кунед:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(6-x) > -2$; б) $\lg(3x-2) \geq 1$;

в) $\log_2(3-2x) - \log_2 13 < 0$; г) $\lg(x^2 + x + 4) < 1$.

41. Системаи муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (435-436):

435. а) $\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ 3x - 5y = -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 3y = -4, \\ 4y - 10x = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1,5y = 2. \end{cases}$

436. а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 14, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y = 6, \\ x + y^2 = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = -3. \end{cases}$

437. Барои кадом қимати a системаи муодилаҳои:

а) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x - 5y = 7 \end{cases}$ ҳалли ягона дорад;

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases} && \text{ҳал надорад;} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3 \end{cases} && \text{ҳалҳои бешумор дорад.} \end{aligned}$$

438. Систекаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{cases} x - 4 > 5 - 2x, \\ 3 - 2x < 7 + x; \end{cases} && \text{б)} \quad \begin{cases} 2x - \frac{3x-1}{2} > \frac{2}{3}, \\ 10x - 2 > 1 + 4x; \end{cases} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} 17(3x-1) - 50x + 1 < 2(x+4), \\ 12 - 11x < 11x + 10; \end{cases} && \text{г)} \quad \begin{cases} \frac{x+4}{x-2} \leq 0, \\ x(x-5) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

42. Систекаи муодилаҳои иррационалӣ

Систекаи муодилаҳоро ҳал кунед (439-440):

$$\begin{aligned} \text{439. а)} \quad & \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2, \\ 4\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 20; \end{cases} && \text{б)} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 2; \end{cases} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ xy = 9; \end{cases} && \text{г)} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x - y = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{440. а)} \quad & \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases} && \text{б)} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35; \end{cases} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ xy = 27; \end{cases} && \text{г)} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

43. Системаи муодилаҳои тригонометрӣ

441. Ҳалли системаи муодилаҳоро дар фосилаи додашуда ёбед:

$$\text{a) } \begin{cases} 2 \sin x = \sqrt{2} \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \sin y \end{cases} \text{ дар } (0; 2\pi);$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ дар } (0; \pi);$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1 \end{cases} \text{ дар } (0; 2\pi);$$

$$\text{г) } \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{9}, \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ дар } (0; \pi);$$

44. Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (442-445):

$$\text{442. а) } \begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 2^y = -1, \\ 3^{x+1} + 5 \cdot 2^{y-1} = 14; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 5^y = 11, \\ 5 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^y = 24; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2^x - 2^y = -1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = -7. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
443. \text{ а) } \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25; \end{cases} \\
\text{в) } \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \log_{\frac{1}{9}}(x+y) = -2, \\ \log_5(x-y) = 2. \end{cases} \\
444. \text{ а) } \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2 xy = 3; \end{cases} & \\
\text{б) } \begin{cases} \log_2(x+14) + \log_2(x+y) = 6, \\ \log_4(x+y) = 0; \end{cases} & \\
\text{в) } \begin{cases} \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1, \\ \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y); \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases} \\
445. \text{ а) } \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \log_3(2x+y^2) = 1, \\ 2^{x+y^2} - 4 = 0; \end{cases} \\
\text{в) } \begin{cases} \log_5(\log_3 x - \log_3 y) = 0, \\ 4^{x-y} = 16; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}
\end{array}$$

45. Масъалаҳои матнӣ

446. Аз ду деҳа дар як вақт ба пешвози ҳамдигар автобус ва мошини боркаш ба ҳаракат сар карданд. Баъди ним соат онҳо вохӯрданд. Масофаи байни деҳаҳоро ёбед, агар маълум бошад, ки суръати автобус ба 60 км/соат ва суръати мошини боркаш ба 48 км/соат баробар аст.

447. Ҳавз ҳангоми кушодани 4 чумак дар 45 дақиқа бо об пур мешавад. Агар 6-то ҳамин ҳел чумакро якбора кушоем, ҳавз дар чанд дақиқа бо об пур мешавад?

448. Аз 48 кг тухмӣ $\frac{3}{4}$ ҳиссаашро барои кишт истифода

бурданд. Чӣ қадар тухмӣ боқӣ мондааст?

449. Трактор 24 га заминро, ки 15%-и масоҳати майдонро ташкил меод, шудгор кард. Масоҳати майдонро ёбед.

450. Падар аз писар 24 сол калон аст. Баъд аз 5 сол ӯ назар ба писараш 5 баробар калон мешавад. Ҳозир падар чандсола аст?

451. Се бинои баландошёна 540 тиреза доранд. Бинои дуюм назар ба бинои якум 2 баробар бештар ва назар ба бинои сеюм 40 тиреза камтар дорад. Шумораи тирезаҳои ҳар як биноро ёбед.

452. Агар ба болои суммаи солҳои се писар адади 5-ро илова кунед, синни падар ҳосил мешавад. Синни писари калонӣ баъд аз 6 сол, синни писари мобайнӣ баъд аз 9 сол ва синни писари хурдӣ баъд аз 10 сол ба нисфи синни падарашон баробар хоҳад шуд. Ҳозир падар ва ҳар як писар чандсола мебошанд?

453. Дар 9 соат завраки мотордор ба самти чараёни дарё ва дар 11 соат ба муқобили чараёни дарё масофаи якхеларо тай мекунад. Суръати завракро дар оби ором ёбед, агар маълум бошад, ки суръати дарё 2 км/соат аст.

454. Дар тахтаи синф ададе навишта шудааст. Яке аз хонандагон ба он 23-ро зам карда, дигарӣ аз он 1-ро тарҳ кард. Натиҷаи замкунӣ аз натиҷаи тарҳкунӣ 7 маротиба зиёд шуд. Дар тахта кадом адад навишта шуда буд?

455. Як тарбуз аз дигарӣ 2 кг ва аз сеюмӣ 5 маротиба сабук аст. Тарбузҳои якум ва сеюм якҷоя аз дуюм 3 маротиба вазнин мебошанд. Вазни ҳар як тарбуз чанд килограмм аст?

456. Барои 600 г конфет ва 1,5 кг кулчаҳои қандин 4,62 сомонӣ доданд. Як килограмм кулчаи қандин нисбат ба конфет 1,4 сомонӣ арзон аст. Нархи 1 кг конфет ва 1 кг кулчаи қандин

чанд сомонӣ аст?

457. Сайёҳон 640 км масофаро 4 соат бо мошин ва 7 соат бо қатора тай карданд. Суръати қатора ва мошинро ёбед, агар маълум бошад, ки суръати қатора аз суръати мошин 5 км/соат зиёд аст.

458. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 12 баробар аст. Миқдори даҳиҳои ин адад аз ҳуди адад 12 маротиба хурд аст. Ададро ёбед.

459. Ду нафар барои иҷрои кор 117 сомонӣ музд гирифтанд. Шахси якум 15 рӯз ва дуюм 14 рӯз кор карда буд. Дар як рӯз ҳар кадоми онҳо чанд сомонӣ музд мегирифтанд, агар маълум бошад, ки шахси якум дар 4 рӯз нисбат ба шахси дуюм дар 3 рӯз 11 сомонӣ зиёд музд гирифтааст?

460. Аз банди А ба банди В пиёдагард равон шуд. Баъди 1 соату 24 дақиқа ба ҳамон самт аз банди А велосипедрон равон шуд ва пас аз як соати ҳаракаташ масофаи $\bar{y}$ ва пиёдагард 1 км –ро ташкил медод. Баъди боз як соат ҳаракат кардан ҳар ду велосипедронро зарур буд, ки барои ба банди В расидан масофаи нисбат ба пиёдагард 2 маротиба камтарро тай кунад. Суръати пиёдагард ва велосипедронро ёбед, агар маълум бошад, ки масофаи байни банди А ва В 27 км аст.

461. Масоҳати секунҷаи росткунҷа 180 см^2 аст. Катетҳои ин секунҷаро ёбед, агар яке аз онҳо аз дигараш 31 см зиёд бошад.

462. Ду адади натуралии пайдарпайро ёбед, ки суммаи квадратҳои онҳо ба 61 баробар бошад.

463. Дар толори синамо 320 ҷой буд. Баъди он ки миқдори ҷойҳои ҳар як қаторро 4-то зиёд ва боз як қатори дигар илова карданд, миқдори ҷойҳо 420-то шуд. Дар толор дар аввал чанд қатор ва дар ҳар як қатор чанд ҷой буд?

464. Қатора барои бартараф кардани ақибмонии 1- соата суръаташро дар тӯли 720 км назар ба суръати аввалааш 10

км/соат зиёд кард. Суръати аввалаи қатораро ёбед.

465*. Баъди 4 соати сар додани ҷумаки якум ҷумаки дуумро кушоданд. Онҳо якҷоя дар 8 соат ҳавзро аз об пур карданд. Ҳар кадом ҷумак дар алоҳидагӣ ҳавзро дар чанд соат аз об пур мекунад, агар маълум бошад, ки барои ин ба ҷумаки якум 8 соат вақти зиёд лозим аст?

466*. Аз маркази ноҳияи Айнӣ ба сӯйи шаҳри Душанбе автобус бо суръати 40 км/соат равон шуд ва баъди 15 дақиқа бо мошини сабукрави аз шаҳри Душанбе меомада вохӯрд. Мошини сабукрав ба маркази ноҳияи Айнӣ расида, баъди 16,5 дақиқа боз ба сӯйи Душанбе равон шуд. Вай дар масофаи 20 км аз Душанбе бо автобус ҳамшафат шуд ва аз он гузашта рафт. Агар суръати мошини сабукрав 50 км/соат бошад, масофаи байни маркази ноҳияи Айнӣ ва шаҳри Душанбе чӣ қадар аст?

§12. ҲОСИЛА, ФУНКСИЯИ ИБТИДОЙ, ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО

46. Ҳосила

467. Аз таърифи ҳосила истифода карда, ҳосилаи функцияи $f(x)$ -ро дар нуктаи x_0 ёбед:

- а) $f(x) = 2 - 3x$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 3$;
в) $f(x) = 2x - 4$, $x_0 = 1$; г) $f(x) = x^3 + 2$, $x_0 = -1$.

Ҳосилаи функсияро ёбед (468-471):

468. а) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 + 2x^3 - x + 1$; б) $f(x) = (1-x)\cos x$;

$$\text{в)} f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x); \quad \text{г)} f(x) = \frac{\sin x}{x-2}.$$

$$469. \text{ а)} f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}; \quad \text{б)} f(x) = (\sqrt{x} - 1) \operatorname{tg} x;$$

$$\text{в)} f(x) = \frac{x-x^3}{1-2x}; \quad \text{г)} f(x) = \frac{\sin x}{1-2\cos x}.$$

$$470. \text{ а)} f(x) = x^2 \cdot 5^x; \quad \text{б)} f(x) = 3^x + \ln x;$$

$$\text{в)} f(x) = e^{-2x} + \log_2 3x; \quad \text{г)} f(x) = \frac{\ell nx}{e^x + 2}.$$

$$471. \text{ а)} f(x) = \sin 2x + \cos 3x; \quad \text{б)} f(x) = \sqrt[6]{2+x^2} - \frac{1}{(2x-1)^2};$$

$$\text{в)} f(x) = (2-3x^2)^7; \quad \text{г)} f(x) = \lg 4x - e^{2x}.$$

472. Қимати ҳосилаи функцияи $f(x)$ -ро дар нуктаи x_0 ҳисоб кунед:

$$\text{а)} f(x) = (1+2x^2)^3, \quad x_0 = 4; \quad \text{б)} f(x) = 2e^{-x} + \ln(x+1), \quad x_0 = 0;$$

$$\text{в)} f(x) = 2\operatorname{tg} x - \cos x, \quad x_0 = 0; \quad \text{г)} f(x) = 2x \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

473. Маълум, ки ҳосилаи функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$: а) мусбат; б) манфӣ аст. Нисбат ба рафтори ин функция дар ин фосила чӣ гуфтан мумкин аст? Агар: в) ғайриманфӣ; г) ғайримусбат бошад-чӣ?

47. Татбиқи ҳосила

474. Муодилаи расандаро ба графики функцияи $f(x)$ дар нуктаи x_0 нависед:

$$\text{а)} f(x) = x^2, \quad x_0 = 2; \quad \text{б)} f(x) = \sin x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{4};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2 + 7}}, \quad x_0 = 5; \quad \text{г) } f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

475. Қимати тақрибии функцияи $f(x)$ -ро дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x, \quad x_0 = 2,0043;$$

$$\text{б) } f(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3, \quad x_0 = 1,98.$$

476. Қимати тақрибии ифодаро ҳисоб кунед:

$$\text{а) } \sqrt{15,84}; \quad \text{б) } \cos 61^\circ; \quad \text{в) } 0,998^{20}; \quad \text{г) } \sqrt[3]{8,008}.$$

477. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои экстремалии функцияро ёбед:

$$\text{а) } y = x^3 + 2x + 1; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x}{x-2};$$

$$\text{в) } f(x) = 2\sin x + \cos 2x; \quad \text{г) } f(x) = x^2 e^{x+1}.$$

Функцияро тадқиқ карда графикашро созед (478-481):

$$\textbf{478.} \quad \text{а) } f(x) = x(3 - x^2); \quad \text{б) } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2;$$

$$\text{в) } f(x) = x^2(x - 3); \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3.$$

$$\textbf{479.} \quad \text{а) } f(x) = 4x^2 - 2x; \quad \text{б) } f(x) = x^3 - 3x^2;$$

$$\text{в) } f(x) = 2x^3 - x^2 - x; \quad \text{г) } f(x) = -x^4 + 8x^2.$$

$$\textbf{480*} \quad \text{а) } f(x) = 1 - 2\sin 2x; \quad \text{б) } f(x) = \cos 2x - 1;$$

$$\text{в) } f(x) = \sin^2 x - \sin x; \quad \text{г) } f(x) = 1 - \sin \frac{x}{2}.$$

481*. а) $f(x) = x - \ln x$; б) $f(x) = x \ln x$;

в) $f(x) = 2^{x^2-x}$; г) $f(x) = xe^{-x}$.

Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)$ -ро дар фосилаи додашуда ёбед (482-484):

482. а) $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 18x^2 + 28x$, $[0; 1,5]$;

б) $f(x) = x^2 \sqrt{3-x}$, $[1; 3]$;

в) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$, $[0,5; 1]$;

г) $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$, $[1; 3]$.

483. а) $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 9$, $[-2; 2]$;

б) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x$, $[-1; 3]$.

484. а) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $f(x) = x + \cos^2 x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

485. Адади 10-ро ба намуди ду ҷамъшаванда тавре ифода кунед, ки суммаи дучандаи квадрати ҷамъшавандаи якум ва сечандаи квадрати ҷамъшавандаи дуюм хурдтарин бошад.

486. Адади 18-ро ба намуди суммаи се ҷамъшавандаи мусбат тавре ифода кунед, ки ҷамъшавандаи якум ба ҷамъшавандаи сеюм баробар бошад ва суммаи квадратҳои ҳамаи се ҷамъшаванда хурдтарин бошад.

487. Суммаи дарозии катети секунҷаи росткунҷа ба 30 см баробар аст. Барои он ки масоҳати ин секунҷа калонтарин шавад, ҳар як катетаи бояд ба чанд баробар бошад?

488. Аз росткунҷае, ки периметраш ба p баробар аст, ҳамаҷанбаҳо ёбед, ки дораи масоҳати калонтарин аст.

489. Дар параболаи $y = x^2$ нуқтаеро ёбед, ки масофааш то нуқтаи $A(2; 0)$ хурдтарин аст.

490. Нуқта аз рӯи қонуни $s(t) = 2t^2 + 12t + 1$ ростхатта ҳаракат мекунад (масофа бо метрҳо, вақт бо сонияҳо чен мешавад). Суръат ва шитоби ҳаракатро ёбед. Дар кадом лаҳза суръати ҳаракат 36 м/сония мешавад?

491. Қисм аз баландии 20 м бо суръати аввалаи 50 м/сония ба боло амудӣ партофта шудааст: а) баъди 4 сония вай аз сатҳи замин дар кадом баландӣ воқеъ мешавад? б) баъд аз чанд сония қисм ба нуқтаи баландтарин мерасад ва дар кадом масофа аз замин ҷойгир мешавад ($g = 10$ м/сония² қабул кунед).

492. Дар кадом нуқтаи параболаи $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ расанда ба тири абсиссаҳо дар таҳти кунҷи 45° моил аст?

493. Қисм амудӣ бо суръати аввалаи $v_0 = 100$ м/сония ба боло партофта шудааст. Қонуни ҳаракати он $S = v_0 t - 4,9t^2$ аст. Суръатро дар охири сонияи 5-ум ёбед.

494. Нуқта ростхатта аз рӯи қонуни $S = 3t^3 - t^2 + t$ ҳаракат мекунад (вақти t бо соат, масофаи S бо метр ҳисоб карда мешавад). Суръат ва шитобро дар охири соати 2-юм ёбед?

48. Функцияи ибтидой

495. Намуди умумии функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ -ро ёбед:

а) $f(x) = 2 \sin x + \cos 6x$; б) $f(x) = x^3 + x^{-7} + x^{1+\sqrt{2}}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 3$; г) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{3}{\sin^2 x}$.

496. Барои функцияи $f(x)$ функцияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x) = \frac{3}{x}$, $M\left(\frac{1}{e}; 4\right)$; б) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + \sin x$, $M(0; 2)$;

в) $f(x) = x^{-4}$, $M\left(2; \frac{1}{3}\right)$; г) $f(x) = \cos 2x$, $M(0; 1)$.

497. Функцияеро ёбед, ки ҳосилааш дар нуқтаи дилхоҳи x ба $4x - 1$ баробар буда, қиматаш дар нуқтаи 2 ба 3 баробар аст.

498. Маълум, ки $f'(x) = 4 - x^3$ ва $f(1) = 2$ аст. Функцияи $f(x)$ -ро ёбед.

499. Нуқтаи моддӣ бо суръати $\mathcal{S}(t) = 2t + 1$ ростхатта ҳаракат мекунад. Муодилаи ҳаракатро ёбед, агар маълум бошад, ки ҳангоми $t = 3$ будан координатаи ин нуқта ба 5 баробар аст.

49. Интеграл

Ҳисоб кунед (500-501):

500. а) $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x + 3) dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$;

$$\text{в)} \int_0^1 (4e^{4x} + 2) dx;$$

$$\text{г)} \int_0^1 (3^x \ln 3 + 1) dx.$$

$$501. \text{ а)} \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 4x + \frac{2}{\pi} \right) dx;$$

$$\text{в)} \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x \right) dx;$$

$$\text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1 \right) dx.$$

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (502-503):

$$502*. \text{ а)} y = 4x - x^2, \quad y = 5, \quad x = 0, \quad x = 3;$$

$$\text{б)} y = \frac{4}{x}, \quad y = -x^2 + 4x + 1, \quad (x > 0);$$

$$\text{в)} y = -x^2 - 4x + 4, \quad y = 10, \quad x = -3, \quad x = 0;$$

$$\text{г)} y = -x + 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0.$$

$$503*. \text{ а)} y = x^2, \quad y = 5x^2 - 1;$$

$$\text{б)} y = x^2 - 4x + 5, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$$

$$\text{в)} y = (x - 3)^2, \quad y = 9 - 2x;$$

$$\text{г)} y = 2\sqrt{x}, \quad y = 0 \quad x = 4, \quad x = 9.$$

504*. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = x^2 - 2x + 2$, расандаи он дар нуқтаи абсиссааш баробари 3, хатҳои $x = 0$ ва $y = 0$ маҳдудро ёбед.

505*. Масоҳати фигураи бо параболаи $y = -x^2 + 4x - 3$ ва расандаҳои он дар нуқтаҳои $M_1(0; -3)$ ва $M(3; 0)$ маҳдудро ёбед.

506*. Барои кадом қимати $a > 0$ масоҳати фигурае, ки бо хатҳои

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{2a}{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = 2a$$

маҳдуд аст, калонтарин мешавад?

507*. Барои кадом қимати $a > 0$ масоҳати фигураи бо хатҳои

$$y = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = 2a$$

маҳдуд хурдтарин мешавад?

ҶАВОБҲО

328. Масалан: а) 64215; б) 64224. **329.** 23. **330.** 24. **332.** а) 599,3;

б) 0,235; в) 0,2805; г) 8,79. **333.** а) 21,6; б) 24; в) $1\frac{182}{203}$; г) $19\frac{1}{3}$.

334. а) 60; б) 18. **335.** а) 1260; б) 96. **336.** в) 40,3; г) 2,3. **337.** а)

$1\frac{4}{9}$; б) $\frac{37}{99}$; в) $1\frac{7}{90}$; г) $1\frac{26}{99}$; д) $1\frac{26}{99}$. **338.** а) *Нишондод:*

баръаксашро фарз карда, барои зиддият ҳосил кардан аз тасдиқи зерин истифода кунед: *агар квадрати адад ба 3 тақсим шавад, он гоҳ худи адад низ ба 3 тақсим мешавад.* **339.**

г) $-1, (4), \lg 100, e, \sqrt{10}$. Ададҳои e ва $\sqrt{10}$ иррационалианд.

340. а) Якумаш калон; б) дуумаш калон. **341.** а) 2; б) 4; в) $\frac{11}{5}$;

г) -4 ; д) 4; е) 10. **342.** а) 2,16; б) 22,4; в) 11,52; г) 126. **343.** а)

175; б) $44\frac{4}{9}$; в) $309\frac{1}{11}$; г) $255\frac{5}{9}$. **344.** а) 80; б) $214\frac{2}{7}$; в) $43\frac{61}{73}$;

г) $15\frac{5}{23}$. **345.** Дуумаш. **346.** а) $8\frac{41}{50}$; б) $1\frac{8}{19}$; в) 1,036; г) $\frac{19}{210}$.

347. а) 793, 8; б) $\frac{73}{360}$. 348. $13\frac{7}{9}$ км ва $17\frac{2}{9}$ км. 349. $\frac{8}{9}$ ва $\frac{2}{3}$.
350. 44. 351. 10,2. 352. 640,5. 353. 4905. 354. 3; 10,5; 18; 25,5; 33. 355. -1. 356. -2, 5, 12, 19, 26,... 357. Барои $x = 2$. 358. 8.
359. 3. 360. а) 36; б) $\frac{1}{2}$. 361. 0,24. 362. 20. 363. 0,125. 364. 16.
365. а) $\frac{229}{990}$; б) $\frac{17}{150}$; в) $8\frac{37}{90}$; г) $2\frac{2}{99}$. 366. а) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$; б) $4(x+3)(y-1)$; в) $a(a+1)(a+b)$; г) $(x+y)(x-y-1)$. 367. а) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; б) $\frac{4}{a}$; в) $\frac{m^3}{m-5}$; г) $\frac{a-b}{a+b}$. 368. а) $\frac{2x+y}{2x-y}$; б) $\frac{8(x^2+y^2)}{x+y}$; в) $-\frac{1}{b}$; г) $\frac{(x-3)(3-x^2)}{3(x^2-3x+9)}$. 369. а) 1; б) $\frac{x-y}{x}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) 8. 370. а) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})$; в) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$; г) $\frac{2}{23}(7+\sqrt{3})$. 371. а) $\frac{1}{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$; б) $\frac{2}{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$; в) $\frac{7}{\sqrt{14}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{7}+2}$. 372. а) 37,5; б) -6; в) 3; г) 0. 373. а) 1; б) -2; в) 0; г) $\frac{(x+y)^2}{4xy}$. 374. а) 0,05; б) $-\frac{1}{3}$; в) 5; г) 2,52. 375. а) 1; б) 2; в) -1; г) $\frac{1}{2}$. 376. а) 1; б) 0; в) 0,75; г) 0. 377. а) 0,75; б) $\frac{3}{2}$; в) -0,96; г) $-\frac{1}{5}$. 378. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) 0,25; г) 0,25. 379. а) $\frac{\pi}{3}$; б) 5; в) $\frac{1}{34}$; г) 1. 380. а) -3; б) -7; в) $-\frac{12}{13}$; г) 0,28. 381. а), г) якумаш калон; б) ҳар ду баробар; в) ду юмаш калон. 382. а), в), г) якумаш калон; б) ду юмаш

калон. **383.** а) $4\frac{3}{4}$; б) $a(a-1)$. **384.** а) 1,25; б) -2; в) 2; г) 10.

385. а) 0,2; б) 12; в) 2; г) 0,5. **386.** а) 0,125; б) 2. **387.** а) 4; б) -0,04. **388.** а) Ҳамаи қиматҳо ғайр аз 0 ва 1; г) ҳамаи қиматҳо ғайр аз -0,5 ва 1. **389.** а), г), е) тоқ; б), в), д) чуфт. **390.** а) Дар $(2; \infty)$ ва $(-\infty; 0)$ мусбат аст; б) дар $(-3; -2)$ ва $(2; 3)$ мусбат аст; в) дар $(-\infty; -1,25)$ ва $(-0,4; \infty)$ мусбат аст; г) дар $(1; 2)$ мусбат аст. **391.** а) дар $(-\infty; -0,75)$ кам шуда, - 0,75 нуқтаи экстремалӣ мебошад; б) Бо истиснои нуқтаи 0 дар тамоми тири ададӣ афзуншаванда аст. Нуқтаи экстремалӣ надорад: в) дар $(-\infty; 1)$ кам шуда, нуқтаи $x=1$ экстремалӣ аст.

392. в) Ҳал. Схемаи умумии тадқиқи функцияи дилхоҳро истифода карда, графикро месозем: 1. Соҳаи муайянии функцияи мазкур маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, яъне фосилаи $(-\infty; \infty)$ аст; 2. Функция на чуфт, на тоқ ва на даврӣ аст; 3. Ҳосилаи тартиби якуми функцияро ёфта, онро ба нул баробар карда, решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем, яъне $y' = -2x + 4$, $y' = 0$ ё ин ки $-2x + 4 = 0$, аз ин ҷо $x = 2$ нуқтаи критикӣ аст; 4. Нобаробариҳои $y' > 0$ ва $y' < 0$ -ро ҳал мекунем. Маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии $-2x + 4 < 0$ фосилаи $(2; \infty)$ аст. Бинобар ин, дар ин фосила функция камшаванда

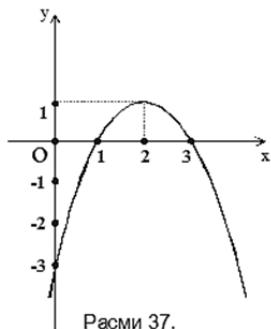
x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	-
y		1	
		max	

аст. Маҷмӯи ҳалҳои $-2x + 4 > 0$ фосилаи $(-\infty; 2)$ -ро ташкил медиҳад. Дар ин фосила функция афзуншаванда аст; 5. Барои ёфтани нуқтаҳои экстремалӣ

ҷадвал тартиб медиҳем:

Функция дар нуқтаи $x = 2$ дорои максимум будааст. Қимати

максимум 1 аст; 6. Азбаски ададҳои 1 ва 3 решаҳои муодилаи $-x^2 + 4x - 3 = 0$ мебошанд, пас графики функсия тирӣ абсиссаро дар нуктаҳои (1; 0) ва (3; 0) мебурад; 7. Зоҳиран фаҳмост, ки $y(0) = -3$ аст, пас график тирӣ ординатаро дар



Расми 37.

нуктаи (0; -3) мебурад; 8. Ҳангоми беохир афзудан ё кам шудани аргумент функсия беохир кам мешавад, ё тавре мегӯянд ба $-\infty$ майл мекунад; 9. Фосилаҳои доималоматии функсия чунинанд: дар (1; 3) мусбат буда, дар $(-\infty; 1)$ ва $(3; \infty)$ манфӣ аст. Натиҷаҳои

тадқиқро ба ҳисоб гирифта, графики функсияро месозем (расми 37). **393.** а) Ҳа, нуктаҳои абсиссаашон $x = -3$ ва $x = 4$; б) не. **394.** а) $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; б)

$x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $x \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

395. а) $[1; 2]$; б) $[-2; 2]$; в) $[-1; 0]$; г) $[0; \sqrt{2}]$. **396.** а) дар

$\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi; \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ мусбат аст. **397.** а) Ҷуфт; б) ток;

в) ток; г) ҷуфт. **398.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) π ; в) $\frac{\pi}{3}$; г) 2π . **399.** а) $-\frac{\pi}{6} + n\pi$,

$n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{6} - \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi(n+2)}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$. **400.**

а) $y_{\max} = y_{\min} = 1$; б) $y_{\min} = -4$, $y_{\max} = 8$; в) $y_{\min} = 1$, $y_{\max} = 2$;

г) $y_{\min} = 1$, $y_{\max}$ вучуд надорад. **401.** а) $(-\infty; \infty)$; б) $(-\infty; \infty)$;

в) $[-2; 2]$; г) $[4; \infty)$; д) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; е)

$(2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5})$; ж) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$; з)

$(-\infty; -11) \cup (-11; -10) \cup (-10; -9) \cup (-9; 2] \cup [3; +\infty)$; и)

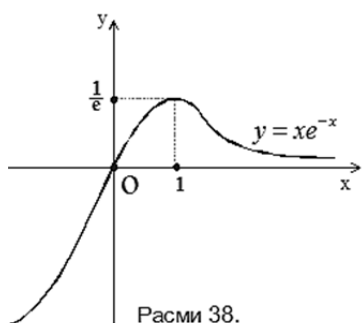
$\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}; +\infty\right)$. **402.** а) $[0; \infty)$; б) $(-1; \infty)$; в) $(-\infty; 1]$; г) $[1; \infty)$. **403.** а) Дар $(-\infty; -1)$ мусбат аст; б) дар $(-\infty; \log_5 4)$ мусбат аст; в) дар $(-1; \infty)$ мусбат аст; г) дар $(7; \infty)$ мусбат аст. **404.** а) Чуфт; б) чуфт; в) тоқ; г) тоқ. **405.** а) $y_{\max} = y(0) = 5$; б) $y_{\max} = y(0) = 5$; в) $y_{\max} = y(0) = 0$; г) $y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0,5$, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **406.** а) $1\frac{3}{8}$; б) $-\frac{4}{11}$; в) $-1\frac{3}{29}$; г) 12,5. **407.** а) -1 ва 4; б) $-\frac{6}{7}$ ва $1\frac{3}{7}$; в) -5 ва 3; г) 1,5 ва 4. **408.** а) Барои $a \neq 6$; б) барои $a = -1,5$; в) барои $a = 3$. **409.** а) $(-3; \infty)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $\emptyset$; г) $\left(1\frac{1}{3}; \infty\right)$. **410.** а) $(1; 2)$; б) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}; \infty\right)$; **411.** а) -2 ва 4; б) $-\frac{2}{3}$ ва 0; в) $\frac{1}{26}$ ва 1; г) 1 ва 4. **412.** а) Барои $k \in \left(-7\frac{1}{3}; 2\right)$ ва $k \neq 1$; б) барои $k = 20 \pm 6\sqrt{5}$; в) барои $k \notin (-1; 3)$. **413.** а) 4; б) -5,5; в) $-\frac{8}{11}$; г) 27. **414.** а) -4 ва 4; б) -1 ва 3; в) 11 ва 13; г) -3 ва 2. **415.** а) 8,4 ва 24; б) -3; в) $-5\frac{5}{7}$ ва 3; г) -3 ва 7. **416.** а) $(-7; 0,5)$; б) $[-4,5; 2]$; в) $[1; 2] \cup (3; \infty)$; г) $(-\infty; 2) \cup (3; 5)$. **417.** а) 2; б) 7; в) 4; г) 6. **418.** а) 1; б) $-\frac{27}{8}$ ва 1; в) 30 ва -61; г) $\frac{5}{4}$. **419.** а) 6; б) 25; в) 3; г) $\emptyset$. **420.** а) $[5; 6)$; б) $(-1; 0)$; в) $\left[2\frac{2}{9}; 4\right) \cup (5; \infty)$; г) $(3; \infty)$. **421.** а) $[-1; 2)$; б) $(-2; 1)$; в) $(-\infty; -1) \cup (0,5; +\infty)$; г)

$(-\infty; -1] \cup \{x=2\}$. **422.** а) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$,
 $n \in Z$; в) $2n\pi - \frac{\pi}{6}$, $n \in Z$; г) $-\frac{1}{18}\pi + \frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$. **423.** а) $n\pi$,
 $n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; в) $(-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + n\pi$ ва $(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 $k, n \in Z$; г) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$. **424.** а) $\frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$; б)
 $105^0 + n\pi$, $n \in Z$; в) $\frac{n\pi}{5}$ ва $\frac{k\pi}{7}$, $k, n \in Z$; г)
 $\pm 2 \arccos \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 4n\pi$, $n \in Z$. **425.** а) $\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \right)$,
 $n \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{12} + 2n\pi; \frac{11\pi}{12} + 2n\pi \right)$, $n \in Z$; в) $\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} \right]$,
 $n \in Z$; г) $\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right)$, $n \in Z$. **426.** а) -4; б) 1; в) -1; г) 2. **427.** а) 0
ва $\frac{1}{2}$; б) 35; в) -3; г) -1. **428.** а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) -3. **429.** а) 1; б) 0,25;
в) 2; г) 2. **430.** а) $(-\infty; -1,5]$; б) $(-1\frac{1}{3}; \infty)$; в) (1; 3); г)
 $(-\infty; -5) \cup (3; \infty)$. **431.** а) 2; б) 4; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$. **432.** а) -1 ва 1,5; б)
 $\sqrt{3}$ ва 27; в) -3; г) -22. **433.** а) -3; б) 4; в) $\frac{1}{3}$ ва 9; г) $\frac{5}{3}$. **434.** а) (2;
6); б) $[4; \infty)$; в) $\left(-5; \frac{3}{2}\right)$; г) (-3; 2). **435.** а) (2; 3); б) $\left(26\frac{2}{3}; 17\right)$
; в) (0,5; 2); г) (32; 20). **436.** а) $\emptyset$; б) (4; 2); (2; 4) ва (-2; -4);
в) (2; 2); г) (1; 4) ва (-1; -4). **437.** а) Барои $a \neq -0,2$; б) барои
 $a = \pm 1$; в) $a = 3$. **438.** а) (3; ∞); б) (0,5; ∞); в) $\left(\frac{1}{11}; \infty\right)$; г) (0; 2).

439. а) (16; 4); б) (4; 1) ва (1; 4); в) (9; 1) ва (1; 9); г) (16; 4). **440.** а) (4; 1) ва (1; 4); б) (27; 8) ва (8; 27); в) (27; 1) ва (1; 27); г) (1; 1).
441. а) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\left(\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$. **442.** а) (3; 2); б) (1; 1); в) (1; 0) ва (0; 1); г) (0; 1). **443.** а) (2; 1); б) (3; 2); в) (4; 2); г) (53; 28). **444.** а) (4; 2); б) (50; -49); в) (6; 2); г) $(10^6; 10^1)$. **445.** а) (2; 4); б) (1; 1) ва (1; -1); в) (3; 1); г) (1; 1) ва (4; 2).
446. 54 км. **447.** Дар 30 дақиқа. **448.** 12 кг. **449.** 160 га. **450.** 25 сола. **451.** 100, 200, 240. **452.** 40, 14, 11 ва 10 сола. **453.** 20 км/соат. **454.** 5. **455.** 2; 4 ва 10 кг. **456.** 3,2 ва 1,8 сомонӣ. **457.** 60 км/соат ва 55 км/соат. **458.** 48. **459.** 5 ва 3 сомонӣ. **460.** 5 км/соат ва 11 км/соат. **461.** 9 ва 40 см. **462.** 5 ва 6. **463.** 20 қатор ва дар ҳар як қатор 16 ҷой. **464.** 80 км/соат. **465.** 24 соат ва 16 соат. **466.** 165 км. **467.** а) -3; б) 12; в) 2; г) 3. **468.** а) $2x^4 + 6x^2 - 1$; б) $-\cos x - (1-x)\sin x$; в) $2(2x^3 - 6x^2 + 3x - 6)$; г) $\frac{(x-2)\cos x - \sin x}{(x-2)^2}$. **469.** а) $2x + \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$; б) $\frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{\cos^2 x}$; в) $\frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{(1-2x)^2}$. **470.** а) $x \cdot 5^x (2 + x \ln 5)$; б) $3^x \ln 3 + \frac{1}{x}$; в) $-2e^{-2x} + \frac{1}{x \ln 2}$; г) $\frac{2 + e^x (1 - x \ln x)}{x(e^x + 2)^2}$. **471.** а) $2 \cos 2x - 3 \sin 3x$; б) $\frac{x}{3^6 \sqrt{(2+x^2)^5}} + \frac{4}{(2x-1)^3}$; в) $-42x(2-3x^2)^6$; г) $\frac{1}{x \ln 10} - 2e^{2x}$. **472.** а) 52272; б) -1; в) 2; г) 2. **473.** а) Функция афзуншаванда аст; б) функция камшаванда аст; в) функция камшаванда нест; г) функция афзуншаванда нест. **474.** а) $y - 4x + 4 = 0$; б) $y - \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; в) $32y + x - 21 = 0$; г)

$2y + 2\sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 = 0$. **475.** а) 0,0043; б) 2,647. **476.** а) 3,982; б) 0,485; в) 0,96; г) 2,00067. **477.** г) Дар $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$ афзуншаванда аст, нуктаҳои 0 ва -2 экстремалианд. **481.** г) Ҳа л. Схемани умумии тадқиқро татбиқ менамоем: 1) Соҳаи муайянии функсия фосилаи $(-\infty; \infty)$ аст; 2) Функсия на чуфт, на тоқ ва на даврӣ мебошад; 3) Ҳосиларо ёфта, онро ба нул баробар карда, решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем: $y' = (xe^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = (1-x)e^{-x}$, $y' = 0$, $(1-x)e^{-x} = 0$, $x = 1$ -нуктаи критикӣ; 4) Нобаробарӣҳои $y' > 0$ ва $y' < 0$ -ро ҳал мекунем. Аз $y' > 0$ ё $(1-x)e^{-x} > 0$ бармеояд, ки $1-x > 0$ ё $x < 1$. Мувофиқан аз $y' < 0$, $x > 1$ бармеояд. Инак, дар фосилаи $(-\infty; 1)$ функсия афзуншаванда буда, дар фосилаи $(1; \infty)$ камшаванда мебошад. Барои ёфтани нуктаҳои экстремалӣ чадвал тартиб медиҳем:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; \infty)$
y'	$\nearrow$	0	$\searrow$
		max	



Расми 38.

Аз чадвал фаҳмида мешавад, ки функсия дар нуктаи $x = 1$ дорои

максимум аст. Қимати максимум ба e^{-1} баробар аст; 6) График тири абсиссаро дар нуктаи $x = 0$ мебурад; 7) График тири ординатаро намебурад; 8) Ҳангоми беохир кам шудани аргумент функсия беохир кам шуда,

ҳангоми беохир афзудани аргумент ба нул наздик мешавад; 9) Дар $(-\infty; 0)$ манфӣ буда, дар $(0; \infty)$ мусбат аст. Бо

назардошти натиҷаҳои тадқиқ графикро месозем (расми 38).

483. а) *Ҳал.* 1. Нуқтаҳои критикиро, ки ба порчаи $[-2; 2]$

тааллуқ доранд, меёбем: $f'(x) = -3x^2 - 12x = -3x(x + 4)$,

$f'(x) = 0$, $-3x(x + 4) = 0$. Қиматҳои $x = 0$ ва $x = -4$ решаҳои

ин муодилаанд. Аз онҳо танҳо $x = 0$ ба $[-2; 2]$ тааллуқ дорад;

2. Қиматҳои функсияро дар ин нуқта ва дар охири порча ҳисоб карда, ҳосил мекунем: $f(-2) = 8 - 6 \cdot 4 + 9 = -7$, $f(0) = 9$,

$f(2) = -8 - 6 \cdot 4 + 9 = -23$; 3. Калонтарини ин қиматҳо 9 буда,

хурдтаринаш -23 аст. *Ҷавоб:* $f_{\max} = f(0) = 9$, $f_{\min} = f(2) = -23$.

485. 6 ва 4. **486.** 6,6 ва 6. **487.** 15 см ва 15 см. **488.** Квадрати

тарафаш $\frac{p}{4}$. **489.** $M(1; 1)$. **490.** $\vartheta(t) = s'(t) = 4t + 12$, $a(t) = 4$,

ҳангоми $t = 6$ с $\vartheta = 36$ метр/сония аст. **491.** а) 140 м; б) 5

сония, 145 м. **492.** Дар нуқтаи $M(-1; -1,5)$. **493.** 51 метр/сония.

494. 32 метр/соат, 34 метр/соат². **495.** а) $-2 \cos x + \frac{1}{6} \sin 6x + C$;

б) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^{-6} + \frac{x^{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} + C$; в) $\ln|x-1| + 3x + C$; г)

$\lg 2x - 3 \operatorname{ctg} x + C$. **496.** а) $3 \ln|x| + 7$; б) $-\frac{1}{2(x+1)^2} - \cos x + 3\frac{1}{2}$; в)

$-\frac{1}{3x^3} + \frac{3}{8}$; г) $\frac{\sin 2x}{2} + 1$. **497.** $2x^2 - x - 3$. **498.** $4x - \frac{x^4}{4} - \frac{7}{4}$. **499.**

$t^2 + t - 7$. **500.** а) 15; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $e^4 + 1$; г) 3. **501.** а) 1,5; б) 0,5; в)

05; г) -1 . **502.** а) 6; б) $4(3 - \ln 4)$; в) 9; г) $\frac{7}{6}$. **503.** а) $\frac{2}{3}$; б) $4\frac{2}{3}$; в)

$10\frac{2}{3}$; г) $25\frac{1}{3}$. **504.** $2\frac{7}{8}$. **505.** 2,25. **506.** Барои $a = \frac{2}{3}$, $S_{\max} = \frac{4}{3}$.

507. Барои $a = 1$, $S_{\min} = \frac{3}{4}$.

МАСЪАЛАҲОИ ҲАЛЛАШОН НИСБАТАН МУРАККАБ

Дар поён якчанд масъалаҳо оварда мешаванд, ки раванди ҳаллашон нисбатан мураккаб аст ё тавре мегӯянд, ғайристандартӣ мебошанд. Ҳалли ин масъалаҳо ба маводди назариявии синфҳои 6 - 11 таъя мекунад. Як қисми онҳо худсоз буда, қисми дигарашон аз озмунҳо ва олимпиадаҳои ноҳиявӣ, минтақавӣ ва ҷумҳуриявӣ гирифта шудаанд. Мақсади пешниҳоди ин мавод дар кори тайёрӣ ба ҷунин озмуну олимпиадаҳо кӯмак кардан аст.

508. Ададҳои x_1 x_2 решаҳои муодилаи $x^2 - 2x - 1 = 0$ мебошанд. Муодилаи квадратие тартиб диҳед, ки решаҳои $x_1 + 2x_2$ ва $2x_1 + x_2$ бошанд.

509. Исбот кунед, ки агар решаҳои муодилаи $x^2 + px + q = 0$ ҳақиқӣ бошанд, он гоҳ решаҳои муодилаи $x^2 + (a + \frac{1}{a})px + q(a - \frac{1}{a})^2 = 0$ низ ҳақиқанд.

510. Бигузор $S_n = \alpha^n + \beta^n$ бошад, ки дар ин ҷо α ва β решаҳои муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ ҳастанд. Вобастагии байни S_n , S_{n-1} ва S_{n+2} -ро ёбед.

511. Барои кадом қиматҳои a , нобаробарии $2x+a>0$ ҳулосаи нобаробарии $x+1>3a$ аст?

512. Ҳамаи он қиматҳои x -ро ёбед, ки барои ҳар гуна қимати параметри a -и ба фосилаи $(1;2)$ тааллуқдошта, нобаробарии $(2a-1)x^2 < (a+1)x+3a$ -ро қаноат мекунонанд.

513. Барои ҳар кадом қимати a , миқдори ҳалҳои муодилаи $\sqrt{2|x|-x^2} = a$ -ро муайян кунед.

514. Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$.

515. Муайян кунед, ки барои кадом қиматҳои a , муодилаи $a(2^x + 2^{-x}) = 5$ решаи ягона дорад ва ин решаи ёбед.

516. Ифодаро сода кунед:

$$a) \sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}}; \quad б) \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}.$$

517. Исбот кунед, ки қимати ифодаи $\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$ аз радикал вобаста нест.

518. Ҳисоб кунед: $\cos 84^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 12^\circ$.

519. Муодиларо ҳал кунед:

$$a) (x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3;$$

$$б) \left(\sqrt{5 + \sqrt{24}} \right)^x + \left(\sqrt{5 - \sqrt{24}} \right)^x = 10;$$

$$в) 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6;$$

$$г) 1 + 7 + 13 + \dots + x = 280.$$

520. Ҳалли ҳақиқии муодиларо ёбед:

$$a) (x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297; \quad б) (x+2)^4 + x^4 = 82.$$

521. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$\log_2 \left(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy} \right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 1}.$$

522. Муодиларо ҳал кунед:

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}; \\
 б) & \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2; \\
 в) & \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.
 \end{aligned}$$

523. Ба зарбкунандаҳо чудо кунед:

$$\begin{aligned}
 a) & x(y^2 - z^2) + y(x^2 - z^2) + z(x^2 - y^2); \\
 б) & (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3; \\
 в) & x^8 + x^7 + 1; \\
 г) & x^8 + 3x^4 + 4.
 \end{aligned}$$

524. Нобаробариро ҳал кунед:

$$\begin{aligned}
 a) & \sqrt[4]{\frac{4-x}{x-5}} \geq \sqrt{\frac{x-4}{x}}; & б) & \log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0; \\
 в) & \sqrt{x^2 - x - 12} < x; & г) & \log_{0,4} \log_6 \left(\frac{x^2 - 4x}{x - 4} \right) < 0; \\
 д) & (8,4)^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1; & е) & \left(\frac{1}{3} \right)^{x+\frac{1}{2}\frac{2}{x}} > \frac{1}{\sqrt{27}}.
 \end{aligned}$$

525. Соҳаи муайяни функсияро ёбед:

$$a) y = \frac{1}{\lg(1 - \sqrt{x^2 - 1})}; \quad б) y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}.$$

526. Нобаробариро исбот кунед:

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{a^3 + b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4, a \geq 0; & б) & \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc; \\
 в) & a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b; & г) & a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.
 \end{aligned}$$

527. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} \sqrt{(x+3)^2} = x+3, \\ \sqrt{(x-3)^2} = 3-x; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a}, \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = c + \frac{1}{c}, \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2; \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + xy + y = b. \end{cases} \end{array}$$

528. Системаи муодилаҳо ҳал карда шавад:

$$\text{а)} \begin{cases} a(yz - zx - xy) = xyz, \\ b(zx - xy - yz) = xyz, \\ c(xy - yz - zx) = xyz; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72, \\ (y+z)((x+y+z)) = 120, \\ (z+x)((x+y+z)) = 96. \end{cases}$$

529. Қимати хурдтарини функсияро ёбед:

$$\text{а)} y = x(x+1)(x+2)(x+3); \quad \text{б)} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

530. Суммаи се узви прогрессияи геометрӣ 114 аст. Агар ин се ададро ҳамчун узвҳои прогрессияи арифметикӣ ҳисоб кунем, он гоҳ онҳо мувофиқан узвҳои якум, чорум ва биступанҷум мешаванд. Ин ададҳоро ёбед.

531. Ададҳои a^2, b^2, c^2 прогрессияи арифметикианд. Исбот кунед, ки ададҳои $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ низ прогрессияи арифметикӣ мебошанд.

532. Ададҳои x, y, z бо тартиби навишташуда прогрессияи геометрӣ ва ададҳои $x+y, y+z, z+x$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Маҳраҷи прогрессияи геометрӣро ёбед.

533. Суммаи прогрессияи беохир камшаванда ба 4 ва суммаи кубҳои узвҳои ҳамин прогрессия ба 192 баробар аст. Узви якум ва маҳраҷи ин прогрессияро ёбед.

534. Маълум, ки суммаҳои m ва n узвҳои прогрессияи арифметикӣ бо ҳам баробаранд. Исбот кунед, ки $S_{m+n} = 0$ аст.

535. Муодилаи расандаи умумии параболоҳои $y = x^2 + 4x + 8$ ва $y = x^2 + 8x + 4$ –ро тартиб диҳед.

536. Ҳамаи қиматҳои a -ро, ки барояшон функцияи $y = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 5$ дар R афзуншаванда аст, ёбед.

537. Баробарии $(x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}$ дода шудааст. Қимати суммаи $a_1 + 2a_2 + \dots + 100a_{100}$ -ро ҳисоб кунед.

538. Адади дурақамаеро ёбед, ки он ба суммаи рақами якум ва квадрати рақами дуюмаш баробар бошад.

539. Ду адади серақамаеро ёбед, ки суммаи онҳо ба 498 каратӣ буда, ҳосили тақсимашон ба 5 баробар бошад.

540. Суммаро ҳисоб кунед:

$$a) S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$б) S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2;$$

$$в) S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n};$$

$$г) S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n.$$

541. Ҳосили зарбро ёбед: $P_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdot \dots \cdot \frac{2^{2^n} + 1}{2^{2^n}}.$

542. Айниятро исбот кунед:

$$a) 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1;$$

$$б) \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1};$$

$$в) \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2x;$$

$$г) 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

543. Қимати калонтарини функсияи $y = \sin x + \sqrt{2} \cos x$ -ро ёбед.

544. Соҳаи қиматҳои функсияи $y = \cos^2 x - \cos x$ -ро ёбед.

545. Ягон ҳалли муодилаи функционалии $f(f(x)) + f(x) = 2x + 1$ -ро ёбед.

546. Нишон диҳед, ки қимати ифодаи $7^n + 3n - 1$ барои ҳар гуна n -и натуралӣ ба адади 9 тақсим мешавад.

547. Кадомаш калон аст: $\sqrt{2^{\sqrt{3}}}$ ё $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$?

548. Агар $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$, $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$ бошад, $\sin \alpha$ -ро ёбед.

549. Маълум, ки $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ аст. Исбот кунед, ки $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ мебошад.

550. Мошин аз шаҳри А ба шаҳри Б бо суръати 50 км/соат ва аз Б ба А бо суръати 30 км/соат ҳаракат кард. Суръати миёнаи мошин ҳангоми рафтани бозгаштанаш чанд аст?

551. Соати 12-и рӯз акрабақҳои соат ва дақиқа болои ҳамдигар меҳобанд. Баъди ин боз кай аввалин маротиба онҳо чунин мавқеъро ишғол мекунанд?

552. Ду қатора дар як вақт аз ду банд ба муқобили

ҳамдигар равон шуданд. Суръати қаторай якум 65 км/соат ва суръати қаторай дуюм 75 км/соат аст. Баъди чанд соат масофаи байни онҳо ба 70 км баробар мешавад, агар масофаи байни бандҳо 350 км бошад.

ҶАВОБҲО

508. $x^2 - 6x + 7 = 0$. **510.** $cS_n = -aS_{n+2} - bS_{n+1}$. **511.** Барои $a \geq \frac{2}{7}$.

512. $(-1; 2]$. **513.** Агар $a < 0$ ё $a > 1$ бошад, муодила ҳал надорад; агар $a = 0$ бошад, сето ҳал дорад; агар $a = 1$ бошад, муодила дуто реша дорад. **514.** $x = a^2 - a$; $a \geq 0$. **515.** $a = \frac{5}{2}$; $x = 0$. **516.**

а) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2})$; б) 2. **518.** $\frac{1}{16}$. **519.** а) $\left\{-4; -\frac{1}{3}; 1; 1,5\right\}$;

б) -2 ва 2 ; в) $2\frac{1}{4}$; з) 55. **520.** а) -8 ва 4 ; б) -3 ва 1 . **521.**

Нишондод: тарафи рости муодила аз 1 калон набуда, тарафи чапаш аз 1 хурд нест. Онҳоро баробари 1 гирифта, системаи ҳосилшударо ҳал карда, ҷавобро ҳосил мекунем:

$(2\pi k; 1)$ ва $((2k+1)\pi; 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **522.** а) $\{-1 - \sqrt{8}; -1 + \sqrt{8}; 2; -4\}$; б) -1 ; в) $[5; 10]$. **523.** а) $(x-z)(y+x)(y+z)$; б) $3(b+c)(a+b)(a+c)$; в) $(x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$; з) $(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)$. **524.**

а) $[4; 5)$; б) $\left[-\frac{3}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$; в) $[4; +\infty)$; з) $(6; +\infty)$;

д) $(-\infty; 3)$; е) $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$. **525.** а) $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$; б) $[-2; 2]$.

527. а) $[-3; 3]$; б) агар $\frac{x+y}{xy} = u$; $\frac{x-y}{xy} = v$ гузорем, он гоҳ u ва

v -ро ёфта, баъд x ва y -ро бо осонӣ меёбем; в)

$\left(1; 1; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; з) аз гузориши $x + y = u$; $xy = v$

истифода баред. **528.** а) $\left\{ (0; 0; z); (0; y; 0); (x; 0; 0), x = -\frac{2bc}{b+c}; \right.$

$y = -\frac{2ac}{a+c}; z = -\frac{2ab}{a+b} \left. \right\};$ б) $\{(2; 4; 6); (-2; -4; -6)\}$. **529.**

а) $y_{\min} = -1$ ҳангоми $x^2 + 3x + 1 = 0$; б) $y_{\min} = -1$ ҳангоми $x = 0$.

530. 2; 14; 98. **532.** -2 ё 1. **533.** $q = -\frac{1}{2}, b_1 = 6$. **535.** $y = 8x + 4$. **536.**

Барои $a \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$. **537.** -100. **538.** 89. **539.** 166 ва 830.

540. а) $S_n = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right);$ б) $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

в) $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n};$ с) $S_n = 2^{n+1}(n-1) + 2$. **541.** $P_n = 2 - \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}.$

543. $\sqrt{3}$. **544.** $\left[-\frac{1}{4}; 2 \right]$. **545.** $f(x) = x + \frac{1}{3}$. **547.** Дуюмаш калон.

548. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **550.** 37,5 км/соат. **551.** Баъди $65\frac{5}{11}$ дақиқа. **552.**

Ҳам баъди 2 соат ва ҳам баъди 3 соат.

МУНДАРИЧА

Мукаддима	3
Боби I. Функцияи ибтидоӣ ва интеграл.....	7
§1. Функцияи ибтидоӣ ва хосиятҳои он.	7
1. Таърифи функцияи ибтидоӣ.	7
2. Хосиятҳои функцияи ибтидоӣ.	13
3. Ёфтани функцияҳои ибтидоӣ. Ҷадвали онҳо.	17
4. Қоидаҳои соддатарини ёфтани функцияҳои ибтидоӣ..	22
§2. Интеграл.	29
5. Масоҳати трапетсияи қатъшуда.	29
6. Ёфтани масоҳати фигураҳо.	34
7. Мафҳуми интеграл. Формулаи Нютон – Лейбнитс....	38
8. Баъзе таърифи интеграл.	46
Маълумоти таърихӣ.	50
Масъалаҳои иловагӣ доир ба боби 1.	53
Масъалаҳои тестӣ доир ба боби 1.....	55
Ҷавобҳо.	67

Боби II. Функцияҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ. Муодила ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣю логарифмӣ.....	73
§3. Функцияи нишондиҳандагӣ. График ва хосиятҳои он	73
9. Таъриф ва графики функцияи нишондиҳандагӣ.	73
10. Хосиятҳои функцияи нишондиҳандагӣ.	78
§4. Муодила, нобаробарӣ ва системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ.....	83
11. Муодилаи нишондиҳандагӣ.	83
12. Нобаробарии нишондиҳандагӣ.	91
13. Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ.	95
§5. Логарифм. Функцияи логарифмӣ ва хосиятҳои он.....	99
14. Таърифи логарифми адад.	99
15. Хосиятҳои логарифм.	104
16. Функцияи логарифмӣ. Хосиятҳо ва графики он.	111
17. Адади e . Логарифми натуралӣ.	119
§6. Муодила ва нобаробарии логарифмӣ.	123

18. Муодилаи логарифмӣ.	123
19. Нобаробарии логарифмӣ.	129
20. Системаи муодилаҳои логарифмӣ ва омехта.	133
§7. Ҳосила ва функцияи ибтидоии функцияҳои нишондиҳандагӣю логарифмӣ ва дараҷагӣ	138
21. Ҳосилаи функцияи нишондиҳандагӣ.	138
22. Функцияи ибтидоии функцияи нишондиҳандагӣ.....	142
23. Ҳосилаи функцияи логарифмӣ.	146
24. Ҳосила ва функцияи ибтидоии функцияи дараҷагӣ...	151
25. Мафҳуми муодилаи дифференсиалӣ.	156
Маълумоти таърихӣ.....	162
Машқҳои иловагӣ доир ба боби 2.....	167
Масъалаҳои тестӣ доир ба боби 2.....	172
Ҷавобҳо.	189
Боби III. Такрор.....	200
§8. Ададҳои ҳақиқӣ.	200
26. Ададҳои раціоналӣ ва иррационалӣ.	200
27. Ҷоишҳо ва таносубҳо.	202

28. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометрӣ.	204
§9. Табдилдиҳии айнияти ифодаҳо.	205
29. Ифодаҳои алгебравӣ.	205
30. Ифодаҳое, ки дорои радикалҳо ва дараҷаҳои нишондиҳандашон касрианд.	206
31. Ифодаҳои тригонометрӣ.	208
32. Ифодаҳое, ки дараҷаҳо ва логарифмҳоро дарбар мегиранд.....	210
§10. Функсияҳо.	211
33. Функсияҳои ратсионалӣ.	211
34. Функсияҳои тригонометрӣ.	212
35. Функсияҳои дараҷагӣ, нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ.....	214
§11. Муодилаҳо ва нобаробариҳо. Системаи муодилаҳо ва нобаробариҳо	215
36. Муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ.....	215
37. Муодилаҳо ва нобаробариҳои ирратсионалӣ.	217
38. Муодилаҳо ва нобаробариҳои тригонометрӣ.	217
39. Муодилаҳо ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ.....	218

40. Муодилаҳо ва нобаробариҳои логарифмӣ.	219
41. Системаи муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ.....	220
42. Системаи муодилаҳои ирратсионалӣ.	221
43. Системаи муодилаҳои тригонометрӣ.	222
44. Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ.....	222
45. Масъалаҳои матнӣ.	223
§12. Ҳосила, функцияи ибтидоӣ, интеграл ва татбиқи	
онҳо	226
46. Ҳосила.	226
47. Татбиқи ҳосила.	227
48. Функцияи ибтидоӣ.	231
49. Интеграл.....	231
Чавобҳо.	233
Масъалаҳои ҳаллашон нисбатан мураккаб.....	243
Чавобҳо.	249
Мундариҷа.	251

Алиев Боймурод

АЛГЕБРА

китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои
таҳсилоти умумӣ

Мухаррири масъул: М. Ф. Абдукаримов

Мухаррир: М. К. Абдукаримзода

Мухаррири техникӣ: Э. Ш. Қодиров

Мусахҳеҳ: Н. М. Қозиҷонова

Саҳифабанд: Ф. Ҳ. Нарзуллоева

Ба матбаа 20.01.2020 супорида шуд.

Ба чоп 01.04.2020 иҷозат дода шуд. Андозаи 60x90 1/16.
16 ҷузъи чопӣ. Адади нашр 110 000 нусха. Супориши № 01/20

Дар матбааи ҶДММ “Душанбе-принт”,
Ҷумҳурии Тоҷикистон, шаҳри Душанбе,
хиёбони С. Айни 128/1 чоп шудааст.